

SESSION DE 1998**concours externe
de recrutement de professeurs agrégés****section : sciences physiques****option : physique****épreuve C :**
problème de physique**Durée : 6 heures**

L'usage de calculatrice électronique de poche - y compris calculatrice programmable et alphanumérique - à fonctionnement autonome, non imprimante, est autorisé conformément à la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986 et à la note de service n° 95-129 du 17 mai 1995.

Tout document est interdit.

MICROSCOPIES À CHAMP PROCHE

Le but de cette épreuve est d'étudier quelques techniques récentes de microscopie, de la famille des « microscopies à champ proche » : dans leur principe, elles consistent toutes à « explorer » une surface à l'aide d'une pointe très fine, de façon à obtenir des informations sur sa forme par des signaux dépendant de la technique utilisée (par exemple, un flux lumineux, un courant électrique, une force « atomique », une force magnétique, etc.).

Nous commencerons par la microscopie optique en champ proche. Sa faisabilité a été testée dès 1972, mais les prototypes des appareils de la première génération datent de 1984, et ceux de la seconde génération de 1989 ; avec ceux-ci, on obtient des limites de résolution latérale et longitudinale valant 2 nm et 0,5 nm respectivement, tout en utilisant la lumière délivrée par un laser hélium-néon. On peut donc dépasser nettement la limite classique de résolution due à la diffraction, d'où l'intérêt de cette technique nouvelle.

Nous étudierons aussi le microscope à effet tunnel d'électrons, qui fonctionne sur des principes analogues, mais qui ne peut sonder que les surfaces des métaux ou des semi-conducteurs. Le prix Nobel de physique a été attribué en 1986 à G. Binnig et H. Rohrer pour la mise au point du premier microscope à effet tunnel dès 1982.

Nous aborderons enfin l'étude des microscopes à force atomique : ils ont été inventés par Binnig, Quate et Gerber en 1986 pour permettre de cartographier les surfaces des corps non métalliques ; ils mettent en jeu les forces d'interaction atomiques ou moléculaires entre la pointe et la surface.

Les trois parties de ce problème sont consacrées respectivement à chacune des trois techniques de microscopie en champ proche mentionnées ci-dessus, dans cet ordre. Quelques résultats de la partie I peuvent être utiles dans la partie II ; la partie III est totalement indépendante des autres.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il croit devoir prendre.

Dans la notation, il sera tenu compte de la clarté et de la concision de la rédaction. On rappelle que toute réponse insuffisamment justifiée est sans valeur.

Notations et conventions

Le repère cartésien $Oxyz$ est orthonormé direct ; il est associé à la base orthonormée directe $(\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y, \mathbf{u}_z)$, et lié à un référentiel galiléen.

Pour les représentations complexes des signaux monochromatiques de pulsation ω , on adoptera la convention $\exp(-i\omega t) = e^{-i\omega t}$, e désignant la base des logarithmes népériens et t la date. Toutes les pulsations considérées dans le problème sont réelles. Pour des ondes électromagnétiques en particulier, on notera λ_0 leur longueur d'onde dans le vide, et on posera $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}$.

Placé en exposant, l'astérisque indique qu'on considère la grandeur complexe conjuguée.

Quand on voudra distinguer les grandeurs réelles de leurs représentations complexes, on les affectera de l'indice *supérieur* r (l'initiale de l'adjectif « réel ») – l'indice *inférieur* r étant réservé aux grandeurs associées à une onde réfléchie.

Le symbole \overline{G} désigne la valeur moyenne temporelle de la grandeur $G(t)$; si elle est périodique (ou pseudo-périodique), il s'agit de la moyenne sur une période (ou pseudo-période).

Les vecteurs sont notés en caractères gras dans l'énoncé, mais sur leur copie les candidats sont tenus de les écrire avec des flèches. Par exemple, \mathbf{r} désigne dans l'énoncé le vecteur position, mais les candidats doivent l'écrire \vec{r} .

On dessinera tous les schémas en convenant que la lumière incidente se propage dans le sens de l'axe Oz , dessiné horizontal et orienté de gauche à droite.

On rappelle que, pour un champ de vecteurs \mathbf{A} , $\text{rot}(\text{rot } \mathbf{A}) = \text{grad}(\text{div } \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A}$.

Transformation de Fourier et produit de convolution

La transformée de Fourier directe d'une fonction f de \mathbf{R}^n dans \mathbf{C} (ou \mathbf{R}) est la fonction, notée F_f ou \tilde{f} , définie par :

$$F_f(v_1, v_2, \dots, v_n) = \iiint_{\mathbf{R}^n} \dots \int f(x_1, x_2, \dots, x_n) e^{-i2\pi(v_1 x_1 + v_2 x_2 + \dots + v_n x_n)} dx_1 dx_2 \dots dx_n;$$

ou encore, avec une écriture plus concise où \mathbf{x} et \mathbf{v} représentent de façon générale deux vecteurs dans des espaces conjugués de dimension n :

$$F_f(\mathbf{v}) = \int_{\mathbf{R}^n} f(\mathbf{x}) e^{-i2\pi \mathbf{v} \cdot \mathbf{x}} d^n \mathbf{x};$$

de même, la transformée de Fourier inverse de f est la fonction de \mathbf{v} définie par $\int_{\mathbf{R}^n} f(\mathbf{x}) e^{+i2\pi \mathbf{v} \cdot \mathbf{x}} d^n \mathbf{x}$ (il suffit de changer \mathbf{v} en $-\mathbf{v}$ dans F_f).

Soit a un nombre réel; avec $h(\mathbf{x}) = f(a\mathbf{x})$, on obtient $F_h(\mathbf{v}) = \frac{1}{|a|^n} F_f\left(\frac{\mathbf{v}}{a}\right)$.

On montre que la transformée de Fourier inverse de F_f est la fonction f .

En dimension un, on rappelle la transformée de Fourier suivante :

$$\text{pour } f(x) = e^{-i\pi x^2}, \quad F_f(v) = e^{-i\frac{\pi}{4} + i\pi v^2}.$$

Le produit de convolution de deux fonctions f et g de \mathbf{R}^n dans \mathbf{C} (ou \mathbf{R}) est la fonction $f * g$ définie par :

$$f * g(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{R}^n} f(\mathbf{u}) g(\mathbf{x} - \mathbf{u}) d^n \mathbf{u}.$$

On rappelle que la transformée de Fourier (directe ou inverse) du produit de convolution $f * g$ est le produit des transformées de Fourier (respectivement directes ou inverses) de f et g , et vice versa.

Constantes physiques fondamentales

On prendra pour les constantes physiques fondamentales les valeurs numériques suivantes :

vitesse de la lumière dans le vide $c = 299\,792\,458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$;

permittivité électrique du vide $\epsilon_0 \cong 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$;

perméabilité magnétique du vide $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$;

constante de Planck $h \cong 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$;

constante de Planck rationalisée $\hbar = \frac{h}{2\pi} \cong 1,05 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$;

charge élémentaire $e \cong 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$;

masse de l'électron $m \cong 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$;

champ de pesanteur $g \cong 9,81 \text{ N} \cdot \text{kg}^{-1}$.

1. PREMIÈRE PARTIE. - MICROSCOPIE EN CHAMP PROCHE OPTIQUE

La microscopie en champ proche optique repose sur l'utilisation et la détection des ondes évanescentes présentes au voisinage immédiat d'une surface (d'où le nom de « champ proche »).

Pour nous familiariser avec les propriétés de ces ondes et la façon de les détecter, nous commencerons par étudier le cas simple d'une lame métallique éclairée en incidence normale par un faisceau de longueur d'onde appropriée (§ I.A.). Puis nous considérerons les ondes évanescentes engendrées en éclairant un dioptre, sous incidence oblique supérieure à l'angle limite, séparant deux milieux transparents ; ces ondes peuvent être détectées par réflexion totale frustrée, ce qui fournit une des méthodes de la microscopie optique en champ proche (§ I.B.). Mais l'utilisation de la réflexion totale n'est pas indispensable et d'autres méthodes sont utilisables, comme nous le laissera entrevoir l'étude du filtrage angulaire d'ondes planes (§ I.C.). Nous pourrions alors discuter des principes généraux de la microscopie en champ proche optique (§ I.D.).

Les milieux matériels considérés dans cette partie sont supposés non magnétiques, et dépourvus de charges volumiques libres.

1.A. Réflexion et transmission d'une onde électromagnétique dans un problème unidirectionnel.

On considère une onde électromagnétique plane monochromatique homogène progressive, dans le domaine $z < 0$ occupé par un milieu linéaire homogène isotrope et non magnétique, d'indice complexe n_1 ; cette onde se trouve décrite par la représentation complexe de son champ électrique, $\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_{01} e^{-i\omega t + i n_1 k_0 z}$, où \mathbf{E}_{01} est son amplitude complexe (vectorielle). Elle est incidente sur un dioptre plan illimité, d'équation $z = 0$, en incidence normale (sauf au § I.A.2.e.) ; dans le domaine $z > 0$ se trouve un autre milieu linéaire homogène isotrope et non magnétique, d'indice complexe n_2 .

1.A.1. Réflexion et transmission partielle sur un dioptre plan en incidence normale.

- Rappeler les définitions des coefficients de réflexion r et de transmission t (ne pas confondre avec la date) pour les champs électriques sur le dioptre d'équation $z = 0$, puis celles des facteurs énergétiques de réflexion R et de transmission T , en incidence normale. Retrouver les expressions de r et t en fonction des indices complexes n_1 et n_2 .
- Ces expressions, établies en supposant que l'indice est discontinu en $z = 0$, sont-elles encore valables lorsque l'indice varie brutalement mais continûment au voisinage de $z = 0$? Préciser ce que peut signifier « varier brutalement ».
- Rappeler la définition du vecteur de Poynting réel \mathbf{R} dans la matière, et sa propriété fondamentale. Indiquer de quelle façon, en régime harmonique (*i.e.* monochromatique), sa moyenne temporelle $\langle \mathbf{R} \rangle$ sur une période peut s'exprimer en fonction des représentations complexes des champs électrique et magnétique.
Donner l'expression du vecteur de Poynting moyen $\langle \mathbf{R}_1 \rangle$, sur une période, de l'onde incidente décrite par $\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_{01} e^{-i\omega t + i n_1 k_0 z}$; on utilisera la décomposition de n_1 en ses parties réelle et imaginaire. Expliquer pourquoi le vecteur de Poynting moyen de la superposition de deux ondes n'est pas en général la somme des vecteurs de Poynting moyens de chacune des ondes.
- Dorénavant, l'indice n_1 du milieu d'entrée est supposé réel. Peut-on exprimer simplement, dans ce cas, le vecteur de Poynting \mathbf{R} de la superposition des deux ondes en présence dans ce milieu (l'onde incidente et l'onde réfléchie en incidence normale) en fonction des vecteurs de Poynting de chacune d'elles, notés \mathbf{R}_i et \mathbf{R}_r , respectivement ? Justifier et commenter votre réponse.

1.A.2. Réflexion sur un milieu conducteur illimité en incidence normale.

On considère maintenant que le milieu d'entrée est le vide, d'indice $n_1 = 1$, et que le milieu de sortie est conducteur, ohmique, non diélectrique et non magnétique, de conductivité complexe

$$\sigma = \frac{\sigma_0}{1 - i\omega/\omega_c}, \quad \sigma_0 \text{ désignant sa conductivité statique et } \omega_c \text{ sa pulsation de coupure.}$$

Pour toute la suite, on considérera que ω est très grand devant ω_c (cas des domaines ultraviolet, et visible), et on négligera 1 devant $i\omega/\omega_c$.

- a. On rappelle que dans les milieux ohmiques suffisamment conducteurs, comme celui considéré ici, la densité de charge volumique libre ρ_f est négligeable. Montrer que l'expression de l'indice complexe d'un tel milieu (que l'on notera N plutôt que n_2) est donnée par $N^2 \equiv 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$; pour cela, on prouvera que la représentation complexe du champ électrique monochromatique \mathbf{E} dans le conducteur obéit à l'équation $\Delta \mathbf{E} + N^2 k_0^2 \mathbf{E} = \mathbf{0}$. Préciser l'expression de ω_p en fonction des paramètres précédents.
- b. Calculer en fonction de \mathbf{E}_{0i} et N la moyenne temporelle $\langle \mathbf{R} \rangle(0_+)$ sur une période du vecteur de Poynting $\mathbf{R}(0_+, t)$ de l'onde transmise, en $z = 0_+$, toujours dans le cas de l'incidence normale. Que vaut-elle pour $\omega < \omega_p$? Quelle est la structure de l'onde transmise dans ce cas, et la signification physique de $l_m \equiv \frac{\lambda_0}{2\pi |N|}$?
- c. Calculer numériquement ω_p , $|N|$ et l_m dans le cas du cuivre, pour lequel $\sigma_0 \equiv 5,7 \cdot 10^7 \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$ et $\omega_c \equiv 1,9 \cdot 10^{12} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, avec $\lambda_0 \equiv 0,6 \mu\text{m}$. À quel domaine spectral correspond ω_p ?
- d. Toujours en incidence normale et pour $\omega < \omega_p$, exprimer en fonction de \mathbf{E}_{0i} et N la valeur instantanée du vecteur de Poynting dans le conducteur, dans le cas d'une polarisation incidente rectiligne, et dans le cas d'une polarisation circulaire; pour cela on écrira le coefficient de transmission t sous la forme $\tau e^{i\varphi}$, où τ désigne son module. Quelle propriété notable remarque-t-on en ce qui concerne le signal transmis?
- e. On considère maintenant le cas de l'incidence oblique. Exprimer l'angle d'incidence limite pour $\omega > \omega_p$. Que devient-il lorsque ω tend vers ω_p par valeurs supérieures? Comparer cette situation à celle de la réflexion totale ordinaire.

I.A.3. Réflexion sur un milieu conducteur limité en incidence normale.

On considère maintenant que le milieu conducteur n'occupe qu'une lame dont les faces sont les plans d'équations $z = 0$ et $z = a$, le vide régnant toujours à l'extérieur; on se place encore dans le cas de l'incidence normale, et on considère de nouveau $\omega < \omega_p$.

- a. À quel effet peut-on s'attendre, du fait de la valeur finie de a ? Pour quel domaine de valeurs de a , en fonction de ω et ω_p , cet effet est-il notable?
- b. En utilisant l'équation $\Delta \mathbf{E} + N^2 k_0^2 \mathbf{E} = \mathbf{0}$, prouver que la représentation complexe du champ électrique dans la lame s'écrit :

$$\mathbf{E} = (\mathbf{E}'_0 e^{-z/l_m} + \mathbf{E}''_0 e^{z/l_m}) e^{-i\omega t}$$

où \mathbf{E}'_0 et \mathbf{E}''_0 sont deux constantes vectorielles complexes. Indiquer les valeurs moyennes $\langle \mathbf{R}' \rangle$ et $\langle \mathbf{R}'' \rangle$ sur une période des vecteurs de Poynting associés à chacune des ondes données par \mathbf{E}'_0 et \mathbf{E}''_0 séparément. Y a-t-il une relation simple entre le vecteur de Poynting moyen $\langle \mathbf{R} \rangle$ dans la lame, et les moyennes $\langle \mathbf{R}' \rangle$ et $\langle \mathbf{R}'' \rangle$? Comparer cette situation à celle décrite au § I.A.1.d.

- c. Pourquoi peut-on considérer que le courant de conduction et le champ électrique sont en quadrature dans le domaine de fréquences considéré, où $\omega \gg \omega_c$? En appliquant le théorème de Poynting, et en considérant les valeurs moyennes sur une période, que peut-on dire alors du champ $\langle \mathbf{R} \rangle$ dans tout l'espace? Montrer que la moyenne temporelle $\langle \mathbf{R}_t \rangle$ du vecteur de Poynting de l'onde transmise, dans le domaine $z > a$, s'écrit :

$$\langle \mathbf{R}_t \rangle = -Y_0 |N| \Im m(\mathbf{E}'_0 \cdot \mathbf{E}''_0^*) \mathbf{u}_z,$$

$\Im m$ désignant la partie imaginaire d'une grandeur complexe. Prévoir grossièrement son évolution en fonction de a . Expliquer pourquoi le passage de l'énergie électromagnétique au travers de la lame est possible.

- d. En utilisant les relations de passage des champs électrique et magnétique aux interfaces, montrer que :

$$\mathbf{E}_{0t} = \frac{2i|N|}{(1 - |N|^2) \operatorname{sh} \frac{a}{l_m} + i|N| 2 \operatorname{ch} \frac{a}{l_m}} \mathbf{E}_{0i};$$

exprimer \mathbf{E}'_0 et \mathbf{E}''_0 en fonction de \mathbf{E}_{0i} sous une forme similaire ; en déduire l'expression de \mathbf{R}_t en fonction de \mathbf{R}_i , $|N|$ et $\operatorname{sh} \frac{a}{l_m}$.

- e. Calculer numériquement, pour $a = l_m$, puis $2 l_m$, puis $10 l_m$, la norme de $\langle \mathbf{R}_t \rangle$ exprimée en pourcentage de celle obtenue pour $a = 0$; on utilisera la valeur de $|N|$ obtenue au § I.A.2.c.

I.B. Réflexion totale en incidence oblique.

On considère une onde électromagnétique plane monochromatique homogène progressive, dans le domaine $z < 0$ occupé par un milieu linéaire homogène isotrope et non magnétique, d'indice réel supérieur à 1 et noté n_1 ; cette onde se trouve décrite par la représentation complexe de son champ électrique, $\mathbf{E}_i = \mathbf{E}_{0i} e^{-i\omega t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$, où \mathbf{u}_i est un vecteur unitaire. Elle est incidente sur un dioptré plan illimité, d'équation $z = 0$; dans le domaine $z > 0$ se trouve un milieu assimilable au vide, d'indice 1. L'angle d'incidence θ de cette onde sur le dioptré est supérieur à l'angle limite.

I.B.1. Réflexion et transmission partielle sur un dioptré plan.

- a. Sans calculer l'amplitude de l'onde transmise dans le domaine $z > 0$, préciser sa structure en déterminant le vecteur unitaire complexe $\mathbf{u} = \mathbf{u}' + i\mathbf{u}''$ colinéaire au vecteur de propagation (ou « vecteur d'onde »), et en décrivant les conséquences de l'expression de \mathbf{u} (où \mathbf{u}' et \mathbf{u}'' sont réels) ; on utilisera, pour déterminer \mathbf{u} , la formulation générale des lois de la réfraction avec les vecteurs de propagation, et les propriétés de ces vecteurs dans chaque milieu. Quel est le type de l'onde transmise par le dioptré ? Quelle est la signification physique de la longueur

$$l_t = \frac{\lambda_0}{2\pi\sqrt{n_1^2 \sin^2 \theta - 1}}?$$

- b. Calculer numériquement l_t pour $\lambda_0 = 0,6 \mu\text{m}$, $n_1 = 1,5$ et $\theta = 45^\circ$.
- c. Calculer la moyenne temporelle $\langle \mathbf{R} \rangle$ du vecteur de Poynting de l'onde transmise, en fonction de \mathbf{u} et de l'amplitude complexe \mathbf{E}_0 de son champ électrique, en $z = 0_+$. Quel résultat, indépendant de la polarisation, peut-on déduire du théorème de Poynting pour $\langle \mathbf{R} \rangle$? Pourquoi dit-on qu'il y a réflexion totale ? Si on étudie la réflexion totale d'un pinceau laser au lieu d'une onde plane, quel phénomène peut-on prévoir en considérant les valeurs instantanées de \mathbf{R} ?
- d. On considère maintenant que le dioptré comporte des stries rectilignes périodiques perpendiculaires au plan d'incidence, constituant un réseau de pas h . L'angle d'incidence est toujours supérieur à l'angle limite. Quel phénomène intéressant pourrait-on observer, et pour quel ordre de grandeur du pas h son intensité serait-elle maximale ?

I.B.2. Réflexion totale frustrée.

On considère maintenant que le vide n'occupe que le domaine compris entre les plans d'équation $z = 0$ et $z = a$, et qu'en dehors se trouvent des milieux d'indices réels n_1 et n_2 supérieurs à 1 pour $z < 0$ et $z > a$ respectivement. L'onde incidente est toujours celle décrite au début du § I.B.1 par $\mathbf{E}_i = \mathbf{E}_{0i} e^{-i\omega t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$, ayant un angle d'incidence θ_1 tel que $1 < n_1 \sin \theta_1 < n_2$.

- a. À quel phénomène peut-on s'attendre, du fait de la valeur finie de a ? Pour quel domaine de valeurs de a , en fonction de la longueur d'onde dans le vide λ_0 , de l'angle d'incidence θ_1 et de l'indice n_1 , cet effet est-il notable ?
- b. Donner la forme générale du champ électrique dans le vide, en faisant intervenir deux constantes \mathbf{E}'_0 et \mathbf{E}''_0 . Indiquer les valeurs moyennes des composantes $\langle \mathbf{R}' \rangle \cdot \mathbf{u}_z$ et $\langle \mathbf{R}'' \rangle \cdot \mathbf{u}_z$ des vecteurs de Poynting associés à chacune des ondes données par \mathbf{E}'_0 et \mathbf{E}''_0 séparément. Y a-t-il une relation simple entre la composante sur Oz du vecteur de Poynting moyen $\langle \mathbf{R} \rangle$ de l'onde dans le vide et les composantes de $\langle \mathbf{R}' \rangle$ et $\langle \mathbf{R}'' \rangle$ sur Oz ?

- c. Prévoir qualitativement l'évolution, en fonction de a , du facteur énergétique de transmission T de la lame. Expliquer pourquoi le passage de l'énergie électromagnétique au travers de la lame est possible, en dépit des réponses aux questions du § I.B.1.c.

I.C. Étude de la diffraction en termes de filtrage angulaire d'ondes planes.

On considère un objet diffractant situé dans le plan Oxy , et de coefficient de transmission complexe $\tau(x, y)$. Sa transformée de Fourier sera notée $\tilde{\tau}(v_x, v_y)$, où v_x et v_y sont les fréquences spatiales associées à x et y respectivement. Dans cette partie, on supposera valable la description scalaire de l'optique : l'amplitude complexe de la grandeur scalaire de l'optique (ou grandeur lumineuse), pour une lumière monochromatique de pulsation ω , est notée $u(x, y, z)$.

On considérera que l'objet se trouve dans l'espace vide dépourvu de charges et de courants électriques.

- a. La relation entre l'amplitude complexe en $z = 0_-$ de l'onde incidente sur l'obstacle, notée $u_0(x, y, 0)$, et l'amplitude complexe en $z = 0_+$ de l'onde émergente, notée $u(x, y, 0)$, s'écrit $u(x, y, 0) = \tau(x, y) u_0(x, y, 0)$.

Quelles sont les hypothèses sous-jacentes à cette expression ?

- b. En considérant ici z comme un paramètre auquel on assigne la valeur 0, on introduit les amplitudes spectrales $A_0(v_x, v_y; 0)$ et $A(v_x, v_y; 0)$ des grandeurs lumineuses complexes $u_0(x, y, 0)$ et $u(x, y, 0)$, définies par l'intermédiaire des transformées de Fourier inverses bidimensionnelles suivantes :

$$u_0(x, y, 0) = \iint_{\mathbf{R}^2} A_0(v_x, v_y; 0) e^{i2\pi \mathbf{v} \cdot \mathbf{r}} dv_x dv_y \quad \text{et} \quad u(x, y, 0) = \iint_{\mathbf{R}^2} A(v_x, v_y; 0) e^{i2\pi \mathbf{v} \cdot \mathbf{r}} dv_x dv_y,$$

$$\text{où } \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Quelle relation y a-t-il entre $A_0(v_x, v_y; 0)$ et $A(v_x, v_y; 0)$?

- c. Maintenant on n'assigne plus à z la valeur 0. Expliquer pourquoi la fonction $u(x, y, z)$ obéit à l'équation $\Delta u + k_0^2 u = 0$. En déduire une équation aux dérivées partielles, par rapport à z , pour la fonction $A(v_x, v_y; z)$.

- d. Intégrer cette équation, et justifier qu'une des solutions doit être éliminée dans le problème physique traité. En déduire la relation entre $A(v_x, v_y; z)$ et $A(v_x, v_y; 0)$: on allégera l'écriture en utilisant les paramètres sans dimension $\alpha = \lambda_0 v_x$, $\beta = \lambda_0 v_y$ et $\gamma^2 = 1 - \alpha^2 - \beta^2$. Quelle est la signification physique de γ ?

- e. Les relations obtenues entre $A_0(v_x, v_y; 0)$, $A(v_x, v_y; 0)$ et $A(v_x, v_y; z)$ permettent d'obtenir, pour $z > 0$ fixé, $u(x, y, z)$ en fonction de $u_0(x, y, 0)$ et de $\tau(x, y)$. Dans le cas où les valeurs utiles de α et β sont très petites devant 1, montrer que $u(x, y, z)$ s'écrit approximativement sous

$$\text{la forme d'une convolution de } u(x, y, 0) \text{ par } -\frac{i}{\lambda_0 z} e^{ik_0 z} \exp\left[ik_0 \frac{x^2 + y^2}{2z}\right].$$

Dans quelles conditions retrouve-t-on la formulation mathématique du principe d'Huygens-Fresnel ?

- f. Quelle est, dans ces équations, la signification physique des termes, et de la quantité $\frac{\lambda_0}{2\pi |\gamma|}$, associés aux valeurs de v_x et v_y tels que : $\sqrt{v_x^2 + v_y^2} > \frac{1}{\lambda_0}$?

- g. Calculer numériquement $\frac{\lambda_0}{2\pi |\gamma|}$ avec $\lambda_0 = 0,6 \mu\text{m}$ et $\sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \frac{1}{2 \text{ nm}}$ (2 nm est la limite de

résolution latérale atteinte par la microscopie optique en champ proche). Comparer avec les valeurs accessibles à l_t (voir § I.B.1.a.) pour une même longueur d'onde λ_0 .

- h.* On considère un instrument d'optique « classique », au sens où son diaphragme d'ouverture se trouve toujours à une distance de l'objet très supérieure à la longueur d'onde. En vous appuyant sur l'étude menée dans ce § I.C., indiquer si un diaphragme d'ouverture infiniment grand conduirait à une résolution idéale (où tous les détails de l'objet seraient parfaitement restitués dans l'image); si votre réponse est négative, préciser l'ordre de grandeur de la limite de résolution, sur l'objet, de cet instrument à diaphragme infini.

I.D. Idées générales de la microscopie optique en champ proche.

- a.* Le principe des microscopes en champ proche est toujours le même : on approche une sonde de la surface que l'on veut examiner ; un dispositif de balayage très précis promène la sonde devant toute la partie de la surface examinée, toujours très près d'elle. Pour la technique utilisant la lumière, la surface est celle d'un milieu transparent non conducteur, la sonde peut être la pointe d'une fibre optique ultra-effilée (son diamètre est de quelques dizaines de nanomètres). Une méthode consiste à éclairer la surface par derrière avec une onde d'incidence légèrement supérieure à l'angle limite (et alors on supposera que cette surface présente des petits défauts de planéité) – voir figure 1.a ; une autre méthode consiste à éclairer cette surface en incidence normale (et alors on supposera que cette surface est plane mais présente des variations de transmission formant un réseau localisé et de pas inférieur à λ_0) – voir figure 1.b. Indiquer, pour chacune de ces deux méthodes, le mécanisme pouvant provoquer une variation du flux lumineux recueilli par la pointe au cours du balayage.

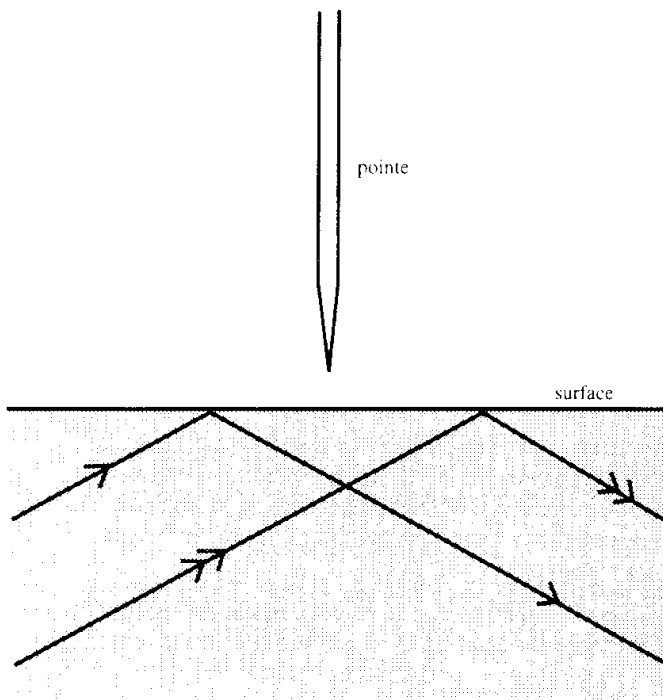


Figure 1.a.

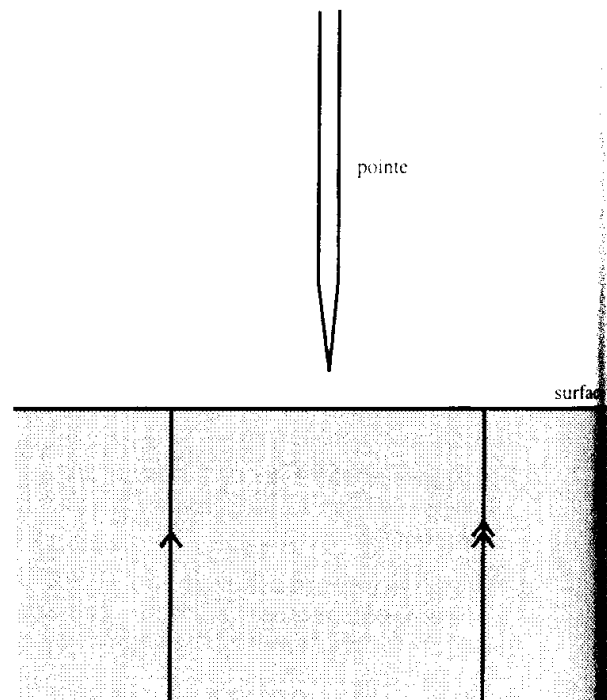


Figure 1.b.

- b.* À l'aide des résultats de cette première partie, expliquer comment on peut obtenir des limites de résolution latérale et longitudinale valant 2 nm et 0,5 nm respectivement, tout en utilisant la lumière délivrée par un laser hélium-néon, et comment il est donc possible conceptuellement de dépasser nettement la limite classique de résolution due à la diffraction.
- c.* Préciser aussi pourquoi il est nécessaire d'approcher la sonde à quelques nanomètres de la surface. En se servant des résultats du § I.C., estimer l'ordre de grandeur de la distance Δ entre la sonde et la surface nécessaire pour résoudre des détails de dimension latérale $\delta \ll \lambda_0$, dans le cas où la surface qui les porte est éclairée sous incidence normale par un faisceau laser de longueur d'onde λ_0 ; calculer numériquement Δ pour $\delta = 1 \text{ nm}$ et $\lambda_0 = 0,6 \mu\text{m}$.

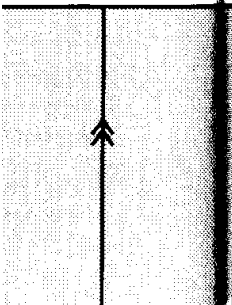
ouverture se trouve
puyant sur l'étude
conduirait à une
l'image); si votre
de cet instrument

- d. On comparera cette situation avec celle des microscopes usuels, où la lentille frontale de l'objectif est située grossièrement à un millimètre de l'objet, et on expliquera pourquoi la résolution de ces microscopes usuels est limitée par le critère de Rayleigh traditionnel – alors qu'elle ne l'est plus avec les microscopes en champ proche.
- e. Qu'est-ce qui limite alors la résolution dans un microscope en champ proche ?

e une sonde de la
de devant toute la
lumière, la surface
ibre optique ultra-
éclairer la surface
s on supposera que
méthode consiste
ce est plane mais
rieur à λ_0) – voir
quer une variation

nte

surface



ir des limites de
utilisant la lumière
ment de dépasser

res de la surface.
ntre la sonde et la
s où la surface qui
nde λ_0 ; calculer

II. DEUXIÈME PARTIE. - MICROSCOPIE À EFFET TUNNEL

La microscopie à effet tunnel repose sur la très forte dépendance du courant électronique - passant par effet tunnel quantique - entre une surface métallique (ou semi-conductrice) et une pointe, en fonction de la distance qui les sépare.

Nous commencerons par étudier l'effet tunnel quantique au travers d'une barrière de potentiel rectangulaire et unidimensionnelle (§ II.A.), en soulignant les analogies avec la transmission d'une onde électromagnétique par une lame conductrice, sous incidence normale, à une pulsation inférieure à sa pulsation de plasma (voir § I.A.3.). Nous envisagerons ensuite le cas particulier des électrons d'un métal, afin de déterminer l'intensité électrique passant par effet tunnel entre deux surfaces métalliques très proches (§ II.B.). Nous pourrions alors estimer les limites de résolution autorisées par la microscopie à effet tunnel (§ II.C.).

II.A. Effet tunnel quantique au travers d'une barrière de potentiel rectangulaire unidimensionnelle.

On considère une barrière de potentiel $V(z)$ à une dimension :

$$V(z) = \begin{cases} V_0 & \text{si } z \in [0, a] \\ 0 & \text{si } z \in \{0, a\} \end{cases}$$

Elle reçoit une onde incidente décrite par la fonction d'onde $\psi_i(z) = \psi_0 e^{-i\omega t + ik_i z}$ associée à des particules incidentes de masse m et d'énergie mécanique $E < V_0$, dans le domaine $z < 0$. Pour toute la suite, la fonction d'onde est supposée obéir à l'équation de Schrödinger.

a. Donner les expressions de ω et k_i en fonction de m et E .

b. Rappeler sans démonstration la propriété essentielle du vecteur courant de probabilité :

$$\mathbf{j} = -i \frac{\hbar}{2m} (\psi^* \text{grad } \psi - \psi \text{grad } \psi^*) = \frac{\hbar}{m} \Im m (\psi^* \text{grad } \psi)$$

où ψ est une fonction d'onde quelconque pour des particules de masse m . Mentionner une propriété analogue concernant le champ électromagnétique.

c. Définir les facteurs de réflexion et de transmission R et T par la barrière. Préciser les analogies entre les grandeurs ψ , k_i et K_b (défini ci-dessous) et les grandeurs définies dans le cas des ondes électromagnétiques au § I.A.3. : \mathbf{E} , k_0 et l_m . Montrer, soit directement, soit en utilisant l'analogie avec le § I.A.3., que :

$$T = \frac{4k_i^2 K_b^2}{4k_i^2 K_b^2 + (k_i^2 + K_b^2)^2 \text{sh}^2(K_b a)}$$

avec $k_b^2 = 2m(E - V_0)/\hbar^2 = -K_b^2 < 0$, ou encore que :

$$T = \frac{1}{1 + \frac{V_0^2}{4E(V_0 - E)} \text{sh}^2 \left[\sqrt{2m(V_0 - E)} a / \hbar \right]}$$

Dans quelle situation peut-on considérer que T est proportionnel à $\exp(-2K_b a)$?

d. Citer quelques situations où l'effet tunnel est mis en œuvre (autres que la microscopie à effet tunnel).

e. On considère une particule incidente, d'énergie moyenne E inférieure à V_0 , représentée par une fonction d'onde $\psi(z, t)$ à support borné (*i.e.* strictement nulle en dehors d'un certain domaine de t et de z , ce qui traduit la localisation de la particule). Y a-t-il réflexion totale rigoureuse de la particule sur la barrière si sa largeur a est infinie ?

II.B. Application aux électrons d'un métal.

On envisage maintenant le cas de deux surfaces métalliques planes et parallèles, distantes de a , et on veut déterminer la densité macroscopique du courant électronique $\mathbf{j}_e = j_e \mathbf{u}_z$ passant de l'une à l'autre par effet tunnel. Dans toute cette étude, on considère les électrons de conduction du métal pour lesquels on utilise le modèle des électrons libres, et sans interaction entre eux, dans une boîte vide (modèle de Sommerfeld). On ne traitera ici qu'un modèle unidimensionnel, où un métal occupe un segment parallèle à Oz et de longueur H .

- a. Pour toute la suite, on considère que les métaux sont à température nulle : $T = 0 \text{ K}$; alors les électrons de conduction occupent des états, décrits par un spin et un vecteur d'onde \mathbf{k} , jusqu'à un niveau d'énergie E_F maximum, dit niveau de Fermi, auquel est associé un vecteur d'onde de norme k_F . On utilisera les « conditions aux limites périodiques », c'est-à-dire qu'on considérera que les fonctions d'onde en e^{ikz} admettent H pour période. Calculer alors la densité d'états en k . En déduire l'expression de l'énergie de Fermi E_F en fonction du nombre N_e d'électrons par unité de longueur dans le métal, en prenant comme convention que l'énergie potentielle des électrons est nulle dans le métal.

Pour extraire d'un métal les électrons de conduction situés au niveau de Fermi, il faut fournir une énergie W appelée « travail (ou énergie) d'extraction ». Comment peut-on mesurer expérimentalement W ?

Comment s'exprime l'énergie potentielle d'un électron dans le vide en dehors du métal, en fonction des grandeurs ci-dessus ?

- b. On considère deux métaux identiques et distants de a , leurs frontières étant en $z = 0$ et $z = a$; on établit entre eux une différence de potentiel U , telle que le potentiel du métal en $z < 0$ soit nul, et celui du métal en $z > a$ soit égal à $-U < 0$. On suppose en outre que cette tension U est faible : $eU \ll E_F$ et W ($-e$ étant la charge de l'électron).

Montrer que le champ électrique est uniforme et parallèle à Oz dans l'espace vide séparant les deux surfaces métalliques.

Représenter sur un diagramme la position relative des niveaux de Fermi des deux métaux, et le profil de variation de l'énergie potentielle d'un électron entre les deux métaux.

- c. Dorénavant, on admet que la barrière d'énergie potentielle séparant les deux surfaces métalliques est rectangulaire et symétrique. Pour un électron incident sur la barrière, donner, en fonction de son énergie mécanique E , de E_F , W et a et grâce au résultat du § II.A.c., l'expression du facteur de transmission $T(E)$ de la barrière.
- d. Calculer numériquement ce facteur de transmission $T(E_F)$ pour un électron de conduction au niveau de Fermi, avec $a = 0,4 \text{ nm}$, $W = 3 \text{ eV}$ et $E_F = 4 \text{ eV}$.
- e. Exprimer, par une intégrale d'une fonction de E , la densité de courant j_e^+ transmis par la barrière et dû aux électrons de conduction provenant de l'intérieur du métal situé en $z < 0$.
- f. En déduire la densité de courant totale, c'est-à-dire due aux électrons traversant la barrière dans les deux sens. On utilisera le fait que le facteur de transmission est le même pour les deux sens de traversée de la barrière, quelle que soit sa forme : pour un électron d'énergie mécanique E incident sur la barrière en $z = 0$ et provenant de $z < 0$, et pour un électron de même énergie E mais incident sur la barrière en $z = a$ et provenant de $z > a$, les facteurs de transmission sont égaux. On simplifiera l'intégrale obtenue en tenant compte de l'approximation :

$$eU \ll E_F, W \text{ et } \frac{\hbar}{a} \sqrt{\frac{2W}{m}}.$$

- g. Calculer numériquement j_e pour $a = 0,4 \text{ nm}$, $W = 3 \text{ eV}$, $E_F = 4 \text{ eV}$ et $U = 0,1 \text{ V}$.

II.C. Limites de résolution.

Les résultats de cette partie permettent d'estimer les limites de résolution du microscope à effet tunnel.

a. Résolution longitudinale (ou en profondeur).

Dans un microscope à effet tunnel, une des plaques métalliques est remplacée par une pointe, ce qui peut modifier les valeurs de l'intensité électrique à mesurer. De plus, dans le cas fréquent où la surface analysée n'est pas métallique (comme dans le modèle de la partie II.B.) mais semi-conductrice (en silicium par exemple), le courant électrique entre la pointe et la surface est plus faible que celui prévu au § II.B.g. ; dans la pratique, son intensité va de 10^{-12} à 10^{-8} A, mais alors on ne sait détecter que des variations relatives de cette intensité de l'ordre de 2 %. En déduire la valeur minimale δa de la variation de a que l'on sait détecter.

b. Résolution latérale.

L'essentiel du courant tunnel entre la pointe et la plaque provient en fait d'une portion de la plaque métallique seulement. Pour estimer la dimension de cette portion, on considérera toujours que $W = 3$ eV, et que la distance entre la pointe et la plaque est $a = 0,4$ nm ; alors l'intensité entre la pointe et un élément de la plaque, en fonction de la distance r qui les sépare, est grossièrement proportionnelle à $\exp - \frac{r}{b}$ avec $b = \frac{\hbar}{2\sqrt{2mW}}$ (plus petit que a). Calculer approximativement le rayon ρ de la zone de la plaque plane fournissant 50 % de l'intensité qui passe par la pointe, sachant que $\frac{x+b}{a+b} \exp - \frac{x-a}{b} = 0,5$ pour $x \approx 0,44$ nm. En déduire un ordre de grandeur de la limite de résolution latérale dans cette situation.

III. TROISIÈME PARTIE. - MICROSCOPIE À FORCE ATOMIQUE

La microscopie à force atomique repose sur la très forte variation de la force entre une surface et une pointe, en fonction de la distance qui les sépare. La pointe se trouve portée par l'extrémité d'une tige, appelée « bras de levier ».

Dans un mode statique de fonctionnement, on peut chercher à mesurer cette force en appréciant le déplacement de l'extrémité du bras de levier qu'elle provoque (§ III.A.). Mais, dans un mode dynamique, on peut aussi estimer le gradient de force en utilisant la modification des fréquences de résonance des vibrations du bras de levier (§ III.B.). Les moindres vibrations du support du bras sont donc néfastes, et il faut monter ce support sur un montage amortisseur qui doit réaliser une isolation mécanique de bonne qualité (§ III.C.).

Remarque : la partie III.C. est indépendante des parties III.A. et III.B.

III.A. Étude de la déformation statique du bras de levier.

Pour étudier la déformation du bras de levier du microscope à force atomique, nous l'assimilerons à une tige inextensible filiforme de longueur L et de masse linéique μ (supposée uniforme). Nous considérerons uniquement les cas où cette tige reste dans le plan vertical Oxy . Une orientation arbitraire permet de définir les parties de la tige situées en amont et en aval d'un de ses points M - voir figure 2.

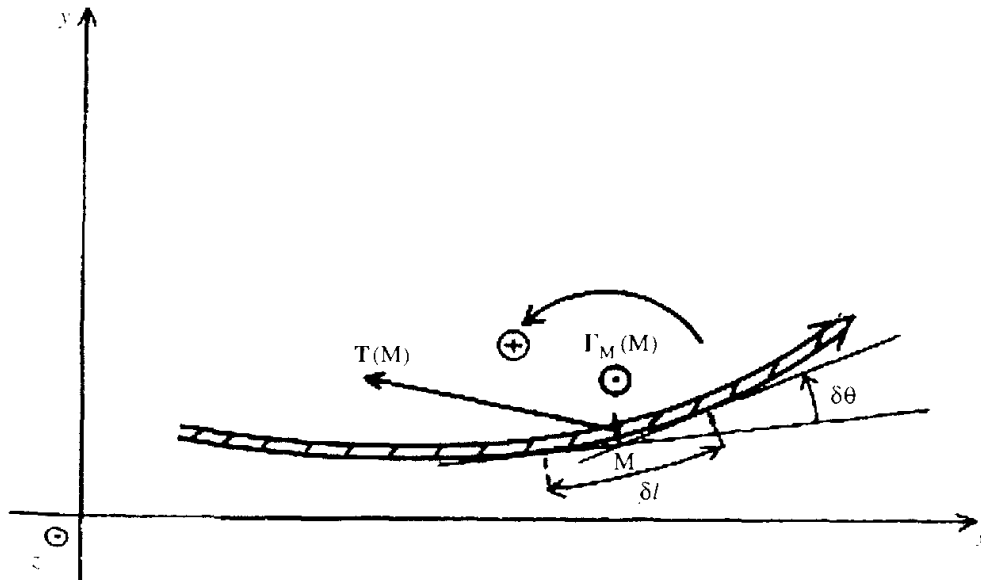


Figure 2

On considère les actions exercées par l'aval de M sur l'amont : on note $T(M)$ leur résultante, et $\Gamma_M(M)$ leur moment par rapport à M . On admet que les actions intérieures à la tige ne sont que des actions « de contact » entre éléments voisins, et sont semblables à celles qu'exercerait un « ressort de flexion » situé en M : on pose donc $\Gamma_M(M) = \frac{C}{\delta l} \delta\theta \mathbf{u}_z$, où $\delta\theta$ représente l'angle infinitésimal, orienté par \mathbf{u}_z , entre les deux tangentes à la tige en des points situés de part et d'autre de M et distants de δl (voir fig. 2). Comme $\Gamma_M(M)$ est indépendant de δl , et que $\delta\theta$ proportionnel à δl , la constante de torsion est $\frac{C}{\delta l}$ inversement proportionnelle à δl . Ce résultat est classique en théorie de l'élasticité, où on montre que $C = EI$, E désignant le module d'Young du matériau, et $I = \iint_{(S)} y^2 dS$ étant proportionnel au moment d'inertie d'une section (S) de la tige par rapport à l'axe Gz passant par le centre d'inertie G de (S) qui sert d'origine. Pour la tige considérée, C est uniforme.

- a. Dorénavant, et pour toute cette partie III, on suppose que la tige n'effectue que des petits mouvements dans le plan vertical Oxy au voisinage de l'axe horizontal Ox , qui est sa position de repos. On tient compte du champ de pesanteur uniforme et constant $\mathbf{g} = -g \mathbf{u}_y$. En notant $Y(x, t)$ le déplacement transversal de la tige, compté positivement dans le sens de Oy , montrer que :

$$T_x \equiv T \frac{\partial Y}{\partial x} - C \frac{\partial^3 Y}{\partial x^3}$$

où $T = T_x$ est quasiment uniforme ; on utilisera le fait que le moment cinétique propre d'un élément de la tige, de longueur ds (s désignant l'abscisse curviligne le long de la tige), est d'ordre 2 en ds , donc négligeable. Pour toute la suite on admettra que $T \equiv 0$, car dans le cas d'une tige la « tension » T_x est négligeable vis-à-vis de l'« effort tranchant » T_x .

- b. On considère (voir fig. 3) que la tige a son extrémité O encastrée perpendiculairement à son support dont la surface est le plan vertical Oyz ; toute la tige est soumise au champ de pesanteur, et en plus l'autre extrémité (d'abscisse $x \equiv L$) est soumise à une force appliquée $\mathbf{F} = F \mathbf{u}_y$. Indiquer, en les justifiant, les conditions aux limites en O , et prouver que les conditions aux limites en $x \equiv L$

s'écrivent $\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} = 0$ et $\frac{\partial^3 Y}{\partial x^3} = -\frac{F}{C}$ (redonnant aussi $T \equiv 0$).

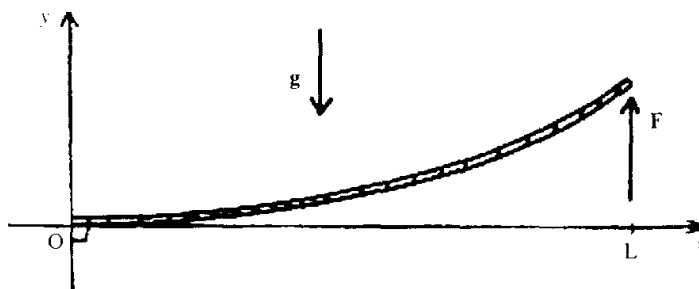


Figure 3

- c. Déterminer la fonction $Y_s(x)$ donnant la forme de la tige à l'équilibre sous l'effet de la pesanteur et de la force statique $\mathbf{F} = F_s \mathbf{u}_y$; vérifier que le déplacement $Y_s(L)$ de son extrémité libre s'écrit :

$$Y_s(L) = \frac{L^3}{3C} F_s - \frac{L^4}{8C} \mu g.$$

- d. Calculer numériquement $Y_s(L)$ pour un bras de levier en silicium, de densité 2,33, de module d'Young $E = 1,69 \cdot 10^{11} \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$, de section circulaire de $2 \mu\text{m}$ de rayon, de longueur $L = 100 \mu\text{m}$, soumis à $F_s = 10^{-8} \text{ N}$. Pour quel ordre de grandeur de F_s l'effet de la pesanteur est-il négligeable ?
- e. On s'intéresse aux phénomènes microscopiques entre la pointe et la surface observée. Quels sont les causes et le sens (attractif ou répulsif) de la force exercée entre deux molécules non polaires, selon la distance qui les sépare ?
- f. Quelles sont les caractéristiques microscopiques du système qui déterminent la valeur de la force entre la pointe du microscope et la surface observée ?

III.B. Détection dynamique des gradients de force.

La tige est toujours encastrée en O et soumise à la pesanteur comme au § III.A.b., mais on la fait vibrer à une fréquence voisine de celle d'un mode propre (les dimensions de la tige sont choisies de façon que ces fréquences soient assez élevées, de l'ordre de 10^2 kHz). On verra qu'on peut ainsi mesurer le gradient de force entre la pointe et la surface.

- a. De l'équation $T_x \equiv -C \frac{\partial^3 Y}{\partial x^3}$ justifiée au § III.A, déduire l'équation de propagation du déplacement transversal $Y(x, t)$ de la tige.

- b. On considère que l'extrémité (d'abscisse $x \equiv L$) de la tige est toujours, comme au III.A., soumise à une force supplémentaire $F = F u_y$, dépendant de la distance entre la pointe et la surface. Comme les déplacements de la pointe sont très faibles, on peut se servir de l'expression approchée $F(t) \equiv F_0 + \alpha Y(L, t)$, où α désigne le gradient de force. On étudie les écarts $y(x, t) = Y(x, t) - Y_s(x)$ de la tige par rapport à sa forme statique, obtenue sous l'effet de la pesanteur et de $F_s = F_0 + \alpha Y_s(L)$. Écrire l'équation donnant les pulsations des modes propres de $y(x, t)$, après avoir précisé les conditions aux limites pour $y(x, t)$; on pourra se contenter d'une écriture générale, qui ne nécessite pas d'achever tous les calculs.

Les paramètres F_0 et α influent-ils tous les deux sur les pulsations propres? Comment peut-on détecter une variation de pulsation propre si la tige vibre à une fréquence imposée par un dispositif exciteur donné? Pourquoi cela permet-il dans la pratique d'avoir des informations sur la forme de la surface balayée par la pointe?

III.C. Filtrage des vibrations du support.

L'obtention de la résolution atomique impose que les vibrations extérieures transmises par le dispositif provoquent au maximum des déplacements de la pointe de l'ordre de 10^{-2} nm longitudinalement et transversalement.

Sommairement, le principe du filtrage des vibrations est le suivant : le support du bras de levier et de la pointe est un solide de masse m_p que l'on relie à un support intermédiaire par un ressort de raideur k_p ; ce support intermédiaire de masse $m_i \gg m_p$ est lui-même relié au sol par un ressort de raideur k_i du même ordre que k_p (voir fig. 4). Les ressorts sont verticaux, et les supports ne peuvent que se translater verticalement. On note z_p et z_i leurs déplacements par rapport à leurs positions d'équilibre dans le champ de pesanteur g uniforme.

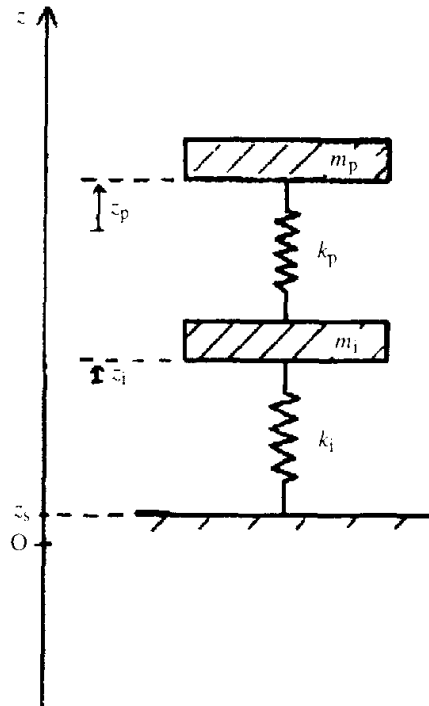


Figure 4

On considère que le sol vibre verticalement, de façon harmonique : supposons que sa cote z_s s'écrive alors $z_s = A_s \cos \omega t$.

- a. Déterminer la fonction de transfert en décibels $Y_p = 20 \log \frac{A_p}{A_s}$, où A_p désigne l'amplitude des vibrations du support de la pointe, en régime harmonique : on introduira les pulsations

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k_i + k_p}{m_i}} \quad \text{et} \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k_p}{m_p}}.$$

Indiquer si les pulsations de résonance se trouvent à l'extérieur ou à l'intérieur de l'intervalle $[\omega_1, \omega_2]$. Donner une représentation schématique de Y_p en fonction de $\log(\omega / 1 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1})$ (diagramme de Bode de Y_p) ; on donnera les valeurs des pentes dans les régions où $\omega_1 \ll \omega \ll \omega_2$ et $\omega \gg \omega_2$.

- b. Quel est l'intérêt de ce montage, par exemple par rapport au système où la masse m_p serait directement reliée au sol par un seul ressort de raideur k_p ? Sachant que les vibrations transmises par le sol se situent pour l'essentiel dans la gamme 10 - 100 Hz, comment choisir les paramètres de façon à rendre le filtrage à deux ressorts le plus efficace possible ? Toutes les fréquences de vibration sont-elles atténuées ? Quel est l'avantage d'avoir choisi un bras de levier dont les fréquences propres sont de l'ordre de 10^2 kHz ?