

SESSION DE 1995

**concours externe
de recrutement de professeurs agrégés**

section : sciences physiques

option : physique

**épreuve C
problème de physique**

Durée : 6 heures

L'usage de calculatrices électroniques de poche — y compris calculatrices programmables et alphanumériques — à fonctionnement autonome, non imprimantes, est autorisé conformément à la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.

Tout document interdit.

Cette épreuve comporte six parties largement indépendantes. Bien qu'elles constituent une progression logique, elles peuvent néanmoins être abordées dans un ordre indifférent.

La longueur de l'énoncé est destinée à faciliter la compréhension physique des phénomènes abordés et à guider les candidats par des étapes intermédiaires.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

PHYSIQUE DE LA COMBUSTION

Ce problème traite de divers aspects de la physique des phénomènes de combustion en phase gazeuse et, en particulier, de la propagation d'une interface, appelée front de flamme. Cette interface sépare le milieu initial, appelé gaz frais et composé de substances réactives prémélangées, du milieu final composé de gaz brûlés. Son évolution est régie par un couplage de phénomènes de diffusion, convection et réaction. On s'intéressera principalement à la structure et la vitesse de flamme, aux conditions d'allumage et à la nature fractale des fronts de flamme plissés par la turbulence.

Données

Constante de Boltzmann : $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$.

Nombre d'Avogadro : $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$.

Charge de l'électron : $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$.

1 atm $\approx 10^5 \text{ Pa}$.

Modélisation

On modélise un système réactif par un mélange de combustible et de comburant susceptible d'induire la réaction :



dans laquelle le nombre de moles est préservé. Les symboles F, O et P représentent les molécules de combustible, de comburant et de produits de réaction. Le mélange contient par ailleurs une espèce inerte notée N, largement prédominante.

Avant réaction, les gaz frais sont à température uniforme et, sauf mention explicite, au repos dans le référentiel du laboratoire. On admet que les gaz sont parfaits et le mélange idéal. On considère la pression p , la capacité calorifique massique à pression constante c_p ainsi que la conductibilité thermique du milieu λ , constantes, uniformes et indépendantes de la température. On néglige les pertes radiatives. On suppose enfin que la structure et la vitesse de flamme ne varient pas au cours de la propagation.

Notations

Les symboles Δ et ∇ représentent l'opérateur laplacien et l'opérateur gradient.

Les vecteurs $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{n}$ représentent des vecteurs unitaires.

On indice par $i = \text{F, O, P, N}$ les variables relatives aux espèces F, O, P et N.

On note T_i et T_∞ la température des gaz frais et des gaz brûlés loin de la flamme.

Les vecteurs seront notés en gras.

I. PREMIÈRE PARTIE

ÉNERGIE D'ACTIVATION ET TAUX DE RÉACTION

La voie suivie par le système réactif pour réaliser la réaction chimique consiste en une collision de molécules de combustible et de comburant suffisamment énergétique pour franchir, dans le référentiel barycentrique de ces molécules, un seuil en énergie, appelé énergie d'activation et noté E_a ($E_a > 0$).

On cherche à déterminer, d'après la thermodynamique statistique, le taux volumique de réaction du système, c'est-à-dire le taux volumique de passage de la barrière d'énergie d'activation. Les molécules obéissent à la statistique de Maxwell-Boltzmann, dont la fonction de distribution dans l'espace des vitesses, normalisée à 1, a pour expression :

$$f(\mathbf{v}) = \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} e^{-\frac{m\mathbf{v}^2}{2k_B T}}$$

m étant la masse des molécules de l'espèce concernée, \mathbf{v} leur vitesse dans le référentiel barycentrique du système, k_B la constante de Boltzmann et T la température, uniforme, du système. On notera f_F et f_O les fonctions de distribution relatives aux molécules de combustible F et de comburant O .

L'étude détaillée des collisions moléculaires montre que, toutes choses égales par ailleurs, la réaction chimique s'effectue de manière nettement préférentielle lorsque la molécule O rencontre la molécule F selon une direction \mathbf{e}_F relative à celle-ci. On modélise cette situation en considérant que :

- la section efficace de collision dans le référentiel de F est celle d'un disque de surface σ et de normale \mathbf{e}_F ;
- le seuil en énergie E_a ne concerne que la part de l'énergie cinétique associée, dans le référentiel barycentrique de F et O , au mouvement projeté selon la direction \mathbf{e}_F .

On note M la masse totale des molécules F et O et μ leur masse réduite :

$$M = m_F + m_O$$

$$\mu = \frac{m_F m_O}{m_F + m_O}$$

- a. On considère une population de molécules F correspondant à une même direction \mathbf{e}_F .

Montrer, par raison d'isotropie, que son taux de réaction est indépendant de \mathbf{e}_F .

En déduire que l'on peut considérer, sans modifier le calcul du taux de réaction, que toutes les molécules F possèdent la même orientation.

Dans la suite de l'énoncé, on se restreindra ainsi à une direction \mathbf{e}_F unique, égale à \mathbf{e}_F .

- b. L'ensemble de cette question se limite à des populations de molécules F et O appartenant à des cellules de l'espace des vitesses centrées sur \mathbf{v}_F et \mathbf{v}_O et d'extension $d^3\mathbf{v}_F$ et $d^3\mathbf{v}_O$.

On note $d n_F(\mathbf{v}_F)$ et $d n_O(\mathbf{v}_O)$ les nombres de telles particules par unité de volume dans l'espace réel. Déterminer ces densités.

Déterminer, dans le référentiel du centre de masse d'une molécule F , la densité de courant $\mathbf{J}(\mathbf{v}_F, \mathbf{v}_O)$ de molécules O .

Déterminer le nombre moyen de collisions $d n_c(\mathbf{v}_F, \mathbf{v}_O)$ dans l'espace réel par unité de volume et de temps de molécules F et O appartenant aux cellules considérées de l'espace des vitesses.

- c. On considère deux molécules F et O . On note E_{cF} et E_{cO} leurs énergies cinétiques dans le référentiel barycentrique du système, \mathbf{v}_C la vitesse de leur centre de masse, \mathbf{v}_r leur vitesse relative.

Rappeler, en utilisant le théorème de Koenig, l'expression de l'énergie cinétique totale $E_c = E_{cF} + E_{cO}$ de ces deux molécules en fonction de M , μ , \mathbf{v}_C et \mathbf{v}_r .

- d. Montrer que le nombre de collisions réactives v_r par unité de volume et de temps s'écrit formellement :

$$v_r = \int_{v_F, v_O > v_d} d n_C (v_F, v_O)$$

où on donnera l'expression de v_d .

- e. Montrer que $d^3 v_F d^3 v_O = d^3 v_C d^3 v_r$.

En déduire :

$$v_r = n_F n_O \sigma \left(\frac{2 k_B T}{\pi \mu} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-E_d / k_B T}$$

et donner la signification physique de la vitesse $\left(\frac{2 k_B T}{\pi \mu} \right)^{\frac{1}{2}}$

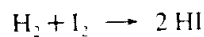
À quel type de loi l'expression de v_r fait-elle référence ?

- f. On introduit le taux de consommation volumique de combustible $W_F = -dn_F/dt$, par ailleurs égal ici à v_r : $W_F = v_r$.

Lorsque le comburant O est en large excès, montrer que le temps caractéristique $\tau_r(T)$ de disparition du combustible, encore appelé temps de réaction, vérifie :

$$\tau_r(T) = \frac{n_F}{v_r}$$

- g. On considère la réaction en phase gazeuse :



à une pression p_0 de 1 atm.

Son taux volumique de réaction v_r vaut, expérimentalement :

$$v_r = n_{H_2} n_{I_2} 1,48 \cdot 10^{-6} (k_B T)^{1/2} e^{-E_d / k_B T} \text{ m}^{-3} \text{ s}^{-1}$$

où $E_d = 1,68 \text{ eV}$.

On suppose le dihydrogène en large excès. Déterminer le temps caractéristique de disparition du diiode aux trois températures suivantes :

$$T_1 = 273 \text{ K}, \quad T_2 = 2 T_1, \quad T_3 = 3 T_1.$$

Que peut-on en conclure pratiquement quant à l'évolution naturelle du mélange initial ?

II. DEUXIEME PARTIE

STRUCTURE ET VITESSE DE FLAMME

On désire étudier un mode de mise à l'équilibre chimique usuellement plus efficace que les fluctuations autour d'états thermiquement homogènes : la propagation d'une interface réactive encore appelée, en combustion, front de flamme.

Cette interface consiste en une zone étroite, appelée zone de réaction, où l'énergie chimique est libérée, contiguë à une zone non réactive plus étendue, appelée zone de préchauffage, où cette énergie est transportée (fig. 1). La libération puis le transport de l'énergie permet de franchir de proche en proche la barrière d'énergie d'activation et ainsi de propager la flamme dans les gaz frais. On se propose de déterminer plus précisément la structure des champs de température (fig. 2) et de concentration à l'intérieur de la flamme ainsi que la vitesse de propagation de celle-ci.

On se restreindra, sauf mention explicite, à une interface plane.

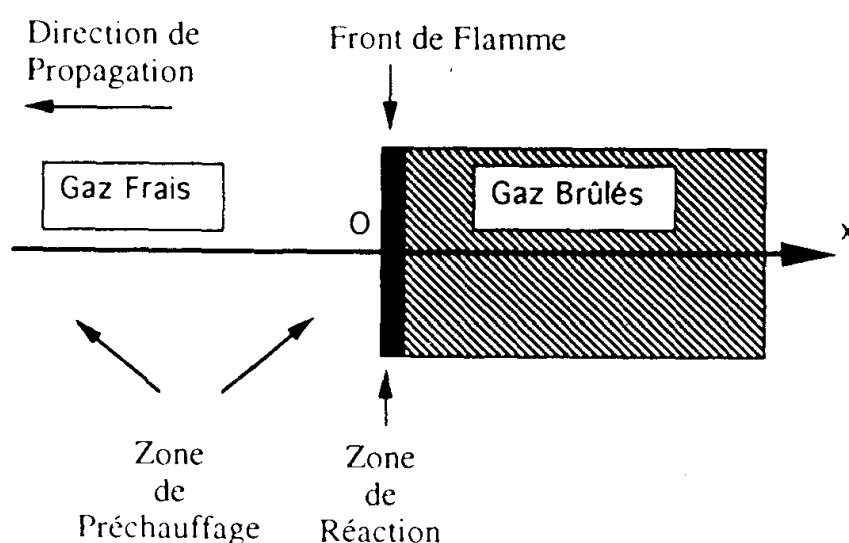


Figure 1

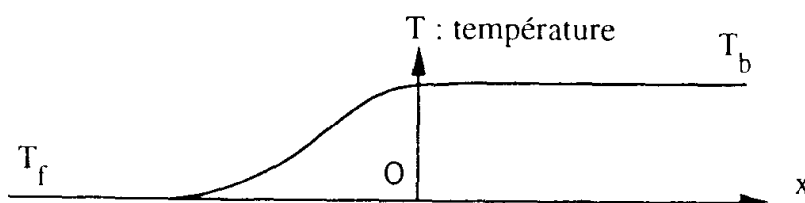


Figure 2

On note Ox l'axe défini par la normale à la flamme orientée vers les gaz brûlés et m_i, ρ_i, n_i , la masse moléculaire, la masse volumique et la densité particulaire de l'espèce i . On appelle $W_F = -\frac{dn_F}{dt}$ le taux volumique de consommation de l'espèce F .

On rappelle l'expression J_s^a de la densité de courant d'origine advective, induite par un transport de matière à vitesse v :

$$J_s^a = \rho \sigma_s v$$

où s est la quantité scalaire transportée, σ_s la concentration massique de s et ρ la masse volumique du milieu.

On admettra enfin que les densités de courant d'origine diffusive sont données par :

- la loi de Fourier reliant la densité de courant de chaleur J_Q^d au gradient de température :

$$J_Q^d = -\rho \kappa \nabla (c_p T)$$

où $\kappa = \lambda/(\rho c_p)$ est la diffusivité thermique ;

- la loi de Fick appliquée aux mélanges dilués, reliant, dans le référentiel du centre de masse du mélange, la densité de courant de masse J_i^d de l'espèce i au gradient de sa concentration massique ρ_i/ρ :

$$J_i^d = -\rho D \nabla \left(\frac{\rho_i}{\rho} \right)$$

la diffusivité massique D étant supposée indépendante des espèces.

II.A. BILANS

II.A.1. Chaleur de réaction.

- On considère la quantité de chaleur $Q_p(T_f)$ dégagée par la combustion, à pression constante p , d'une mole de combustible F initialement à température des gaz frais T_f .

Pour quelle transformation $Q_p(T_f)$ serait-elle la chaleur effectivement reçue par le milieu extérieur au milieu brûlé ?

Montrer que Q_p ne dépend pas du mode de réaction suivi et est indépendante de la température T_f des gaz frais.

Par quelle procédure pourrait-on en principe la mesurer ?

- On note W_Q le taux volumique de production de chaleur.

Montrer que $W_Q = q_p W_F$ où $q_p = \frac{Q_p}{\Delta H}$.

II.A.2. Équations de bilan.

On se place dans le référentiel R_0 se déplaçant avec la flamme et on note v la vitesse des écoulements.

En admettant que les gaz frais ne réagissent pas spontanément, ($W_F(x = -\infty) = 0$), on supposera que les champs qui caractérisent la flamme sont stationnaires dans R_0 .

- Montrer que le bilan d'une quantité scalaire s se réduit à :

$$\frac{dJ_s^t}{dx} = W$$

où J^t est la densité totale de courant de la quantité s , somme de ses densités de courant advective et diffusive, J_s^t sa composante sur l'axe Ox et W le taux de production volumique de s .

m_i, ρ_i, n_i , la masse
 $W_F = - \frac{dn_F}{dt}$ le taux

par un transport de

masse volumique du

masse du mélange, la
 ρ_i/ρ :

pression constante p ,

par le milieu extérieur

de la température T_f

asse des écoulements.

$\kappa = 0$), on supposera

e courant advective et
 ue de s .

- b. Montrer que la résultante des densités de courant de masse d'origine diffusive est globalement nulle en chaque point.

En déduire, en utilisant le principe de conservation de la masse, que la quantité ρv_x , où v_x est la composante de \mathbf{v} sur l'axe Ox , est une constante.

On note $\rho_i U_L$ la constante ρv_x où ρ_i est la masse volumique des gaz frais loin de la flamme : $\rho_i = \rho(x = -\infty)$. Montrer que U_L , appelée vitesse laminaire de flamme, représente le module de sa vitesse par rapport aux gaz frais.

- c. On note $Y_F = \frac{\rho_F}{\rho}$ la concentration massique de F.

Montrer que les densités totales de courant de chaleur et de masse de combustible F s'écrivent :

$$\mathbf{J}_Q = \rho c_p T \mathbf{v} - \lambda \nabla(T)$$

$$\mathbf{J}_F = \rho Y_F \mathbf{v} - \rho D \nabla(Y_F)$$

- d. En déduire les équations de bilan de T et de Y_F :

$$\rho_i U_L \frac{d}{dx} [c_p T] - \frac{d}{dx} \left[\lambda \frac{dT}{dx} \right] = q_p W_F \quad (1)$$

$$\rho_i U_L \frac{dY_F}{dx} - \frac{d}{dx} \left[\rho D \frac{dY_F}{dx} \right] = -m_F W_F \quad (2)$$

II.A.3. Bilan d'enthalpie.

- a. Montrer que l'enthalpie massique du milieu s'écrit :

$$h = c_p T + \frac{q_p}{m_F} Y_F \quad (3)$$

- b. Déterminer, en utilisant les relations (1) (2) et (3), l'équation régissant le bilan de h dans le référentiel de flamme R_0 .

- c. Montrer, en intégrant cette équation entre $x = -\infty$ et $x = +\infty$, que les enthalpies massiques des gaz frais et des gaz brûlés ont même valeur.

En déduire la température T_b des gaz brûlés en fonction de celle des gaz frais T_f , de m_F , c_p , q_p et de la valeur Y_{Ff} de Y_F dans les gaz frais.

- d. On se place dans le cas particulier où $\kappa = D$.

Déterminer l'équation régissant le bilan de h dans ce cas.

Montrer, en intégrant cette équation et en éliminant les divergences, que l'enthalpie massique reste uniforme dans le milieu.

II.B. STRUCTURE DE FLAMME

On se place dans le cas particulier où $\kappa = D$.

II.B.1. Équation de structure.

a. On définit ainsi la concentration massique réduite Y et la température réduite θ :

$$Y = \frac{Y_F}{Y_{F,F}}$$

$$\theta = \frac{T - T_i}{T_b - T_i}$$

En utilisant le résultat de la question II.A.3.d, montrer que $Y = 1 - \theta$.

b. La relation précédente montre que l'étude de la structure de flamme peut se réduire à celle d'une seule variable, la température réduite θ par exemple. Montrer que θ vérifie :

$$U_i \frac{d\theta}{dx} - D_i \frac{d^2\theta}{dx^2} = \frac{\epsilon(\theta)}{\tau}$$

où

$$\frac{\epsilon(\theta)}{\tau} = \frac{m_t W_t}{\rho_i Y_{F,i}}$$

D_i étant la diffusivité massique des gaz frais, avec, pour conditions aux limites :

$$\theta(-\infty) = 0 \text{ et } \theta(+\infty) = 1.$$

En introduisant la différence de température réduite $\alpha = 1 - \frac{T_i}{T_b}$ et l'énergie d'activation réduite

$\beta = \frac{E_a}{k_B T_b} \alpha$, les résultats de la partie I. conduisent aux expressions suivantes de $\epsilon(\theta)$ et τ^{-1} :

$$\epsilon(\theta) = (1 - \theta) \exp \left[- \frac{\beta(1 - \theta)}{1 + \alpha(\theta - 1)} \right]$$

$$\tau^{-1} = \frac{T_i}{T} n_{O_2} \sigma \left(\frac{2 k_B T}{\pi \mu} \right)^{1/2} \exp \left(- \frac{\beta}{\alpha} \right).$$

c. On se place dorénavant dans le cas où α est voisin de 1 et où β est grand devant l'unité : $\alpha \approx 1$, $\beta \gg 1$. On se propose alors de simplifier l'étude de la structure de flamme en négligeant les variations non pertinentes du terme de production $\frac{\epsilon(\theta)}{\tau}$. On introduit pour cela la fonction $\hat{\epsilon}(\theta)$:

$$\hat{\epsilon}(\theta) = (1 - \theta) \exp \{-\beta(1 - \theta)\}.$$

Montrer que, lorsque $\beta(1 - \theta)$ est inférieur à quelques unités, $\epsilon(\theta)$ et $\hat{\epsilon}(\theta)$ sont très voisines en valeur relative et que, dans le cas opposé, elles sont toutes deux de valeur négligeable.

Représenter graphiquement l'allure des fonctions $\epsilon(\theta)$ et $\hat{\epsilon}(\theta)$.

On substitue la fonction $\hat{\epsilon}(\theta)$ à $\epsilon(\theta)$ et le nombre $\tau(T_b)$ à la fonction τ . Justifier la validité de cette approximation.

Montrer que $\tau(T_b) = \tau_i(T_b) (1 - \alpha)^{-1}$ où l'expression du temps de réaction τ_i est donnée dans la partie I.

Déterminer, dans le cadre de la substitution précédente, le rapport des valeurs de W_i dans les gaz frais et brûlés.

On négligera par la suite la valeur non nulle de W_i dans les gaz frais, en accord avec les hypothèses utilisées. Cette approximation est-elle justifiée ?

II.B.2. Champ de température.

La température réduite θ satisfait dans le référentiel de flamme l'équation suivante que l'on se propose de résoudre dans un cas simplifié :

$$U_L \frac{d\theta}{dx} - D_t \frac{d^2\theta}{dx^2} = \frac{\hat{\varepsilon}(\theta)}{\tau(T_b)}.$$

On modélise dans ce but le membre de droite par une fonction créneau $c(\theta)/\tau_t$, de même intégrale entre $\theta = 0$ et $\theta = 1$ que la fonction $\frac{\hat{\varepsilon}(\theta)}{\tau(T_b)}$, $c(\theta)$ étant la fonction suivante :

$$0 \leq \theta < 1 - \beta^{-1} : c(\theta) = 0$$

$$1 - \beta^{-1} \leq \theta < 1 : c(\theta) = \beta$$

$$\theta = 1 : c(1) = 0$$

a. Montrer que dans la limite $\beta \gg 1$: $\beta^2 \int_0^1 \hat{\varepsilon}(\theta) d\theta \rightarrow 1$.

En déduire : $\tau_t = \beta^2 \tau(T_b)$.

On fixe à 0 l'abscisse du point où $\theta = 1 - \beta^{-1}$ et on appelle δ celle du point où θ devient juste égal à 1. On définit ainsi trois domaines, $x < 0$, $0 < x < \delta$, $\delta < x$, numérotés 1, 2, 3 respectivement et dont les variables seront indicées en conséquence (fig. 3).

On utilisera les longueurs suivantes : $d = D_t/U_L$ et $\ell = U_L \tau_t$.

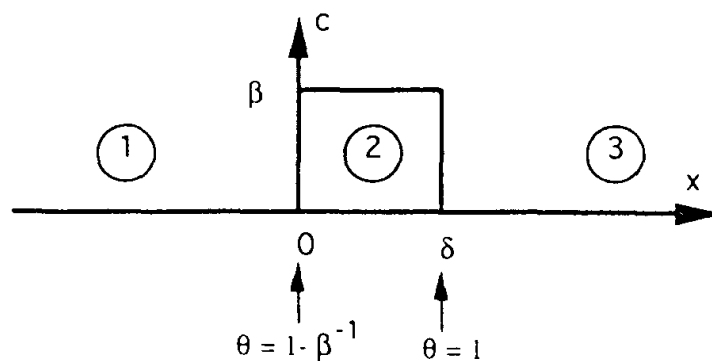


Figure 3

b. Montrer que dans chacun des trois domaines, la fonction $\theta(x)$ est de la forme :

$$\theta_i(x) = a_i e^{x/d} + b_i x + c_i$$

où i est l'indice des domaines.

c. Montrer que, par définition de $c(\theta)$, $b_1 = 0$, $b_2 = \beta/\ell$, $b_3 = 0$.

d. Montrer, en imposant les valeurs de θ en $x = 0$ et $x = -\infty$, puis en $x = +\infty$ que :

$$\theta_1(x) = \frac{\beta - 1}{\beta} e^{x/d}$$

$$\theta_3 = 1$$

e. Quelles conditions de compatibilité entre les solutions doit-on imposer en $x = 0$ et $x = \delta$?

- 10 -

f. Montrer, en appliquant ces conditions en $x = \delta$, que :

$$\theta_2(x) = 1 + \beta \frac{x - \delta}{\ell} + \beta \frac{d}{\ell} [1 - e^{-(x - \delta)/d}]$$

g. Montrer, en appliquant ces mêmes conditions en $x = 0$, que :

$$\frac{\delta}{\ell} = \frac{1}{\beta}$$

$$\beta \frac{1}{\beta} = \frac{d}{\delta} [1 - e^{-\delta/d}]$$

h. En déduire, dans la limite $\beta \gg 1$:

$$\ell = 2d$$

$$U_L^2 = 2 \frac{D_f}{\tau_t}$$

$$d^2 = \frac{D_f \tau_t}{2}$$

Justifier l'appellation d'épaisseur de flamme et de temps de transit pour d et τ_t .

i. Représenter sur un même graphe et avec des échelles arbitraires en ordonnées, les allures du champ de température réduite θ , de la concentration réduite Y et du terme de production $c(\theta)/\tau_t$ en fonction de x/d .

Indiquer l'emplacement de la zone de réaction et de la zone de préchauffage ainsi que les principales dimensions caractéristiques.

j. Calculer U_L dans le cas où $T_f = 300$ K, $T_b = 1500$ K, $\beta = 8$, $\tau_t(T_b) = 2 \cdot 10^{-6}$ s et $D_f = 1 \cdot 10^{-5}$ m² s⁻¹.

II.C. VITESSE DE FLAMME

On s'intéresse maintenant à une flamme sphérique. En négligeant les effets de courbure et de gradient d'écoulement, on supposera que sa vitesse normale par rapport aux gaz frais reste en tout point égale à la vitesse laminaire de flamme U_L définie en II.A.2.b. On se place dans le référentiel R où le centre de la sphère définie par la flamme est au repos.

On note \mathbf{n} , la normale au front de flamme orientée dans le sens de la propagation, \mathbf{v}_n la vitesse normale d'un élément du front de flamme, \mathbf{v}_f la vitesse des gaz frais et \mathbf{v}_b celle des gaz brûlés.

1. La vitesse $U_L \mathbf{n}$ est la vitesse normale d'un élément du front de flamme par rapport à des gaz frais au repos. Déterminer une relation entre \mathbf{v}_n , \mathbf{v}_f , U_L et \mathbf{n} .
2. En utilisant la symétrie sphérique et la loi de conservation de la masse dans un milieu incompressible, montrer que les gaz contenus à l'intérieur de la sphère définie par la flamme sont au repos dans R .
3. En utilisant le résultat établi en II.A.2.b. dans le référentiel de flamme, déterminer une relation entre \mathbf{v}_n , \mathbf{v}_f , \mathbf{v}_b et $\chi = T_b/T_f$.
4. En déduire les vitesses \mathbf{v}_n , \mathbf{v}_f et \mathbf{v}_b dans les deux cas suivants :
 - la flamme avance vers l'intérieur de la sphère ;
 - la flamme avance vers l'extérieur de la sphère.
5. Calculer χ et les vitesses de flamme dans les deux cas précédents lorsque $U_L = 0,35$ m · s⁻¹, $T_f = 300$ K et $T_b = 1500$ K.

À quel phénomène physique peut-on attribuer cette différence de vitesse de flamme ?

III. TROISIÈME PARTIE

POTENTIEL HORS ÉQUILIBRE

On se propose d'étendre le concept de potentiel thermodynamique à des états hors équilibre d'un système réactif, puis d'utiliser cet outil pour déterminer l'évolution suivie par le système. On cherche ainsi à identifier une fonction scalaire de l'état du système, décroissant au cours de l'évolution. Cette fonction sera appelée potentiel d'évolution du système.

On considère à cette fin un système de volume fini V constant, dont l'état est représenté par une variable unique θ dépendant de l'espace et du temps et satisfaisant, dans le référentiel du laboratoire, une équation de réaction-diffusion :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = D \Delta \theta + W(\theta) \quad (4)$$

La variable θ , sans dimension, est comprise entre les valeurs 0 et 1 correspondant à l'état initial du système et à son état final après réaction. Le coefficient de diffusion D , constant, et le terme de production $W(\theta)$ sont tous les deux positifs. Par analogie avec la combustion, on appellera θ et $\mathbf{J}_\theta^d = -D \nabla \theta$ température et densité de courant de chaleur.

Deux types de conditions aux limites sont considérés :

— condition adiabatique : la densité de courant de chaleur sur la surface Σ , de normale \mathbf{n} , qui limite le système est nulle :

$$\mathbf{J}_\theta^d \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Sigma ;$$

— condition stationnaire : la température est stationnaire sur Σ :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = 0 \text{ sur } \Sigma .$$

III.A. POTENTIEL

À un instant t , on associe à l'état $\theta(x, y, z, t)$, *a priori* quelconque, du système V , le nombre $K(t)$:

$$K(t) = \iiint_V \left[\frac{D}{2} (\nabla \theta)^2 - G(\theta) \right] d\tau$$

où

$$G(\theta) = \int_0^\theta W(\xi) d\xi .$$

1. Montrer que :

$$\frac{dK}{dt} = \oint_{\Sigma} \left[D \frac{\partial \theta}{\partial t} \nabla \theta \right] \cdot d\mathbf{S} - \iiint_V \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 d\tau .$$

En déduire que, pour les deux types de conditions aux limites considérés, K est un potentiel d'évolution du système, applicable à tout état, même hors équilibre.

2. Montrer qu'il existe un minimum absolu de K .

En déduire que toute évolution du système relaxe nécessairement vers un état stationnaire.

III.B. DIFFUSION PURE

On se restreint à un système purement diffusif en imposant $W = 0$.

1. On se place dans le cadre de conditions aux limites adiabatiques.

Montrer, en utilisant une analogie électrostatique, que les états stationnaires $\left(\frac{\partial \theta}{\partial t} = 0\right)$ sont forcément homogènes ($\nabla \theta = 0$).

En déduire, en utilisant la partie III.A., que la diffusion pure conduit nécessairement ici à un état stationnaire et homogène.

Quelle est alors la valeur de K ?

2. On se place dans le cadre de conditions aux limites stationnaires.

Montrer, en utilisant la partie III.A., que la diffusion pure conduit nécessairement ici à un état stationnaire, *a priori* inhomogène.

Montrer que, dans un système unidimensionnel, la densité de courant $J_\theta^d(x, t)$ dans un état stationnaire est une constante qu'on appellera J_s . Déterminer la valeur de K en fonction de D , J_s et V et donner un exemple physique simple de cette situation.

III.C. DIFFUSION-RÉACTION

Le terme de production W , positif, est une fonction non nulle de θ .

On se place dans le cadre de conditions aux limites adiabatiques.

1. Décrire l'état correspondant au minimum absolu de K .
2. Montrer, en utilisant le théorème de Gauss, que, pour des états stationnaires, le terme de production W est nul dans le volume V .

En déduire, en utilisant la partie III.B.1., que l'évolution du mélange réactif aboutit nécessairement à un état stationnaire et homogène.

3. On se restreint à des états homogènes : $\nabla \theta = 0$.

Soient les fonctions :

$$W_1(\theta) = \frac{1}{\tau} (1 - \theta) \exp[-\beta (1 - \theta)]$$

$$W_2(\theta) = \theta W_1(\theta)$$

dans lesquelles τ et β , constants, représentent un temps caractéristique de réaction et une énergie d'activation réduite.

Quels sont les états d'équilibre du système et leur type de stabilité lorsque $W = W_1$ et $W = W_2$?

4. On considère l'analogie d'une flamme plane, à savoir une interface plane, d'aire A et d'épaisseur d , séparant un domaine homogène de température $\theta = 0$, d'un autre domaine homogène de température $\theta = 1$. On suppose qu'elle avance sans déformation de structure à une vitesse v_n .

La vitesse v_n peut-elle être nulle ?

Déterminer le sens de propagation de l'interface et montrer que le module U_L de sa vitesse vérifie :

$$\frac{dK}{dt} = -U_L A [G(1) - G(0)] .$$

5. On se place dans le cas où $W = W_1$ et où $\beta \gg 1$.

Déterminer, en utilisant la relation ci-dessus, une expression approchée de dK/dt en fonction de U_L , A , τ et β .

Déterminer, en utilisant la relation obtenue en III.A., une expression approchée de dK/dt en fonction de U_L , A et d .

En conclure que U_L est de l'ordre de d/τ_L où $\tau_L = \beta^2 \tau$.

0) sont forcément

à un état stationnaire

un état stationnaire,

à un état stationnaire est
et V et donner un

le production W est

essairement à un état

ction et une énergie

$W = W_2$?

IV. QUATRIÈME PARTIE

ALLUMAGE

On se propose de déterminer les conditions d'allumage d'une flamme par un dépôt d'énergie ponctuel, puis de les appliquer à la réalisation pratique d'un allumage commandé de moteur à combustion interne d'automobile.

IV.A. SEUIL D'ALLUMAGE

On admet qu'un dépôt local d'énergie a permis de brûler une sphère de rayon r_f et de donner ainsi naissance à une flamme sphérique dont on cherche à déterminer l'évolution (fig. 4).

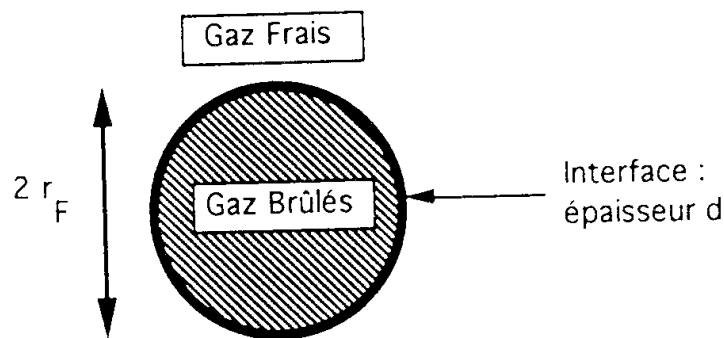


Figure 4

On se place dans le cadre du formalisme de la partie III selon lequel le milieu est décrit par un champ de température réduite θ , satisfaisant l'équation de réaction-diffusion (4). On n'utilisera cependant pas cette relation explicitement par la suite. On admet que l'évolution du système est gouvernée par le potentiel K défini en III.A., dont les valeurs ne peuvent que décroître au cours du temps. On prendra pour $W(\theta)$ l'expression :

$$W(\theta) = \frac{1}{\tau} (1 - \theta) \exp[-\beta (1 - \theta)]$$

où τ et β sont des constantes. On modélise de manière grossière la flamme par le champ de température réduite suivant en coordonnées sphériques :

$$r < r_f : \theta = 1$$

$$r > r_f + d : \theta = 0$$

où d est l'épaisseur de flamme vérifiant la relation $d^2 = D\tau_i/2$ obtenue en II.B.2.h. dans le cas d'une flamme plane avec $D_i = D$ et $\tau_i = \beta^2 \tau$. On note δG la valeur, positive, de $G(1) - G(0)$ et $K(r_f)$ la valeur du potentiel K lorsque la flamme a un rayon r_f .

1. Justifier l'approximation suivante du gradient de température radial, $\partial\theta/\partial r$:

$$r < r_f \text{ ou } r > r_f + d : \partial\theta/\partial r = 0$$

$$r_f < r < r_f + d : \partial\theta/\partial r = -1/d.$$

2. En déduire une approximation de $K(r_f)$ en fonction de d , r_f , D et δG .

3. Déterminer $dK(r_f)/dt$ en fonction de dr_f/dt , r_f , d , D et δG .
4. En déduire, en fonction de D , d et δG , une valeur critique r_c de r_f en dessous de laquelle la flamme s'éteint et au-dessus de laquelle elle envahit le milieu.
5. Montrer que, dans la limite $\beta \gg 1$, $r_c = \frac{D\tau_f}{d}$.

En déduire que $r_c = 2d$.

Commenter le résultat obtenu au vu de la modélisation adoptée dans ce problème.

IV.B. ALLUMAGE COMMANDÉ

Le résultat précédent montre que, pour réussir un allumage, il suffit de réaliser un noyau de flamme suffisamment grand, par exemple en brûlant en un temps court un volume de dimension de l'ordre de r_c . L'apport minimal d'énergie nécessaire pour cela est appelé énergie d'allumage E . On se propose de l'évaluer dans le cadre d'un moteur d'automobile à combustion interne et de déterminer les caractéristiques principales d'un dispositif électrique susceptible de le fournir.

IV.B.1. Énergie d'allumage et tension de claquage.

On assimile l'énergie d'allumage E à l'énergie nécessaire pour obtenir, à pression constante, une sphère de gaz frais de température T_b et de rayon r_c à partir d'une sphère de gaz frais de température T_f . Cette énergie est délivrée par la création d'une étincelle entre les deux électrodes d'une bougie pour une certaine tension, appelée tension de claquage U_c . On suppose que le milieu est composé de gaz parfaits diatomiques.

On admet, en négligeant l'avance à l'allumage du moteur, que la décharge électrique se produit à la fin de la phase de compression des gaz frais dans la chambre de combustion.

- a. Déterminer l'énergie d'allumage E en fonction de r_c , T_f , T_b , de la capacité calorifique molaire à pression constante C_p des gaz frais et de leur volume molaire V_M à T_b .

- b. Quelle est la nature de la compression des gaz frais sachant que le moteur effectue plusieurs milliers de tours par minute ?

Déterminer la pression p_f et la température T_f des gaz frais à l'instant d'allumage en fonction de la pression p_i et de la température T_i avant compression et du rapport volumique de compression $\omega = V_i/V_f$ où V_i et V_f sont les volumes initial et final des gaz frais.

- c. On donne $p_i = 1 \text{ atm}$, $T_i = 300 \text{ K}$, $\omega = 8$ et $r_c = 1 \text{ mm}$.

On néglige la variation d'enthalpie massique avec la température, de sorte que $T_b - T_f$ est une constante égale à 1200 K .

Calculer la température T_f , la pression p_f et l'énergie d'allumage E .

- d. On suppose que le mécanisme d'ionisation qui préside à l'étincelle correspond à des chocs suffisamment énergétiques entre molécules et électrons libres présents dans le milieu, ces derniers étant accélérés dans le champ électrique régnant entre électrodes. On adopte le critère énergétique suivant : l'ionisation d'une molécule ne survient que si l'énergie cédée par le champ électrique à l'électron concerné depuis son précédent choc est égale à une valeur seuil, E_i , appelée énergie d'ionisation.

Déterminer la tension de claquage U_c en fonction de E_i , de la charge $-e$ de l'électron, du libre parcours moyen ℓ des électrons libres dans le milieu et de la distance δ entre électrodes.

e. On donne $\bar{\ell} = \frac{1}{n\sigma}$ où n est la densité volumique de molécules et σ la section efficace moyenne de collision pour ce processus.

Montrer que U_c est proportionnel au produit $\delta\omega$ à p_1 , T_1 , σ et E_1 fixés.

Calculer U_c pour $\delta = r_c = 1 \text{ mm}$, $p_1 = 1 \text{ atm}$, $T_1 = 300 \text{ K}$, $\omega = 8$, $\sigma = 4 \cdot 10^{-20} \text{ m}^2$ et $E_1 = 5 \text{ eV}$.

IV.B.2. Dispositif d'allumage.

Le dispositif électrique d'allumage est schématisé sur la figure ci-dessous :

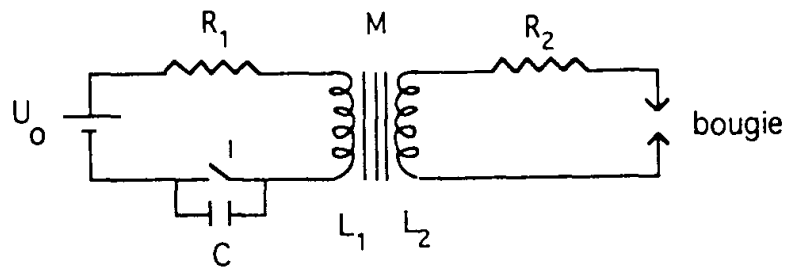


Figure 5

Il consiste en deux circuits inductifs, primaire et secondaire, couplés. Le circuit primaire comporte en série un générateur de tension U_0 , une bobine B_1 et un condensateur de capacité C pouvant être shunté par un dispositif symbolisé par l'interrupteur I . Le circuit secondaire comporte en série une bobine B_2 et la bougie. On note i_1 et i_2 les courants électriques dans les circuits primaire et secondaire, L_1 et L_2 les coefficients de self-induction des deux bobines B_1 et B_2 , R_1 et R_2 leurs résistances et M leur coefficient d'induction mutuelle.

L'énergie nécessaire à la formation d'une étincelle puis de l'allumage est délivrée à la bougie via la bobine B_2 grâce à la décharge de la bobine B_1 lors de l'ouverture de l'interrupteur I . Ce processus comporte trois phases :

- Phase I : l'interrupteur I est fermé ; la bobine B_1 acquiert de l'énergie magnétique ; le circuit secondaire est ouvert car il n'y a pas d'étincelle. On note τ_0 le temps caractéristique d'évolution du courant i_1 ;
- Phase II : l'interrupteur I est ouvert à $t = n\tau_0$; le condensateur n'est alors plus shunté ; la décharge ne se produit pas ($i_2 = 0$) tant que la tension U_2 aux bornes de la bougie est inférieure à la tension de claquage U_c ;
- Phase III : à l'instant où U_2 devient égal à U_c , la décharge électrique par étincelle s'amorce ; le courant i_2 devient non nul et une partie de l'énergie correspondante est transmise au gaz. Cette phase n'est pas étudiée dans la suite.

a. Établir les équations d'évolution des courants i_1 et i_2 dans les deux circuits.

b. On se restreint à la phase I. La condition initiale est $i_1 = 0$ à $t = 0$.

Déterminer le courant $i_1(t)$ dans le circuit primaire, son temps caractéristique d'évolution τ_0 , l'énergie magnétique $E_1(t)$ emmagasinée par la bobine et la tension $U_2(t)$ aux bornes de la bougie.

Donner les valeurs de τ_0 , $i_1(3\tau_0)$ et $E_1(3\tau_0)$ lorsque $L_1 = 4 \cdot 10^{-3} \text{ H}$, $R_1 = 2 \Omega$ et $U_0 = 12 \text{ V}$.

fficace moyenne de

$$\sigma = 4 \cdot 10^{-20} \text{ m}^2$$

- c. On se restreint à la phase II. On fixe l'origine des temps à l'instant où l'interrupteur K est ouvert. On admet que n est suffisamment grand pour que la phase I ait abouti à un équilibre de sorte qu'une condition initiale de la phase II soit $i_1 = \frac{U_0}{R_1}$. On note $\omega_0^2 = \frac{1}{L_1 C}$ et on se place dans le cas $\omega_0 \tau_0 \gg 1$.

Déterminer le courant $i_1(t)$ dans le circuit primaire.

En déduire la tension $U_2(t)$ aux bornes de la bobine B_2 et sa valeur maximale U_{2m} .

Quelle valeur prend U_{2m} lorsque $L_1 = 4 \cdot 10^{-3} \text{ H}$, $R_1 = 2 \Omega$, $C = 0,4 \mu\text{F}$ et $M = 0,2 \text{ H}$?

- d. Représenter l'allure de i_1 et U_2 au cours des phases I et II en supposant qu'il n'y ait pas d'étincelle.
- e. En pratique, on observe qu'une tension de l'ordre de $\frac{U_0}{2}$ suffit pour initier une étincelle et que les énergies consommées dans les résistances ou rayonnées sont au plus de l'ordre de celle apportée à la bougie. Dans le cadre des valeurs numériques données pour les différentes variables du problème, est-il alors possible de réaliser l'allumage du mélange réactif par le dispositif étudié ?

imaire comporte en
ité C pouvant être
nporte en série une
circuits primaire et
 B_2 , R_1 et R_2 leurs

e à la bougie via la
ur I. Ce processus

gnétique; le circuit
mps caractéristique

ors plus shunté; la
nes de la bougie est

incelle s'amorce; le
nte est transmise au

que d'évolution τ_0 ,
bornes de la bougie.
 2Ω et $U_0 = 12 \text{ V}$.

V. CINQUIÈME PARTIE

MESURE OPTIQUE DE LA VITESSE DE FLAMME

On se propose d'étudier la possibilité de mesure optique de la vitesse de flamme en considérant la propagation d'un rayon lumineux dans un milieu d'indice optique variable.

On se restreint à une flamme plane d'épaisseur d , de structure stationnaire représentée en figure 2, se propageant à vitesse U_L dans le référentiel du laboratoire dans un tube de section carrée de côté L et d'axe Ox (fig. 6).

On utilise un faisceau laser incident de direction Oy , de puissance I_0 , de largeur a , formé de rayons parallèles et dont on supposera la distribution de puissance homogène. L'éclairement incident Φ selon la direction Ox normale au faisceau sera ainsi décrit, par unité de longueur sur Oz , par la fonction :

$$\Phi(x) = \frac{I_0}{a} \Pi_a(x)$$

où Π_a est la fonction « rectangle » définie par :

$$\Pi_a(x) = 1 \quad \text{pour} \quad -\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2}$$

$$\Pi_a(x) = 0 \quad \text{ailleurs.}$$

On rappelle la loi de Gladstone reliant l'indice optique n d'un gaz à sa masse volumique ρ : $(n - 1) \rho^{-1}$ est une constante. On se place dans le cas où les variations relatives d'indice optique au cours de la traversée du milieu sont faibles : $|\nabla n| \ll \frac{n}{L}$. On néglige enfin le phénomène de diffraction.

V.A. PROPAGATION DE LA LUMIÈRE DANS UN MILIEU D'INDICE VARIABLE

On se restreint à un milieu d'indice optique $n(x)$ variable suivant une seule direction e_x de l'espace. On note L son extension suivant la direction orthogonale e_y .

1. Rappeler le théorème de Malus.
2. Déterminer qualitativement l'évolution d'une surface d'onde plane parallèle à e_x .
En déduire que tout rayon lumineux subit une déviation à la traversée de ce milieu.
Citer un phénomène atmosphérique mettant en jeu ce phénomène.
3. On considère un rayon lumineux de direction e_y à l'entrée du milieu.
Déterminer l'angle θ dont on a tourné sa direction de propagation à la traversée du milieu.
En déduire le rayon de courbure R de la trajectoire du rayon lumineux dans le milieu.
Représenter sur un schéma les constructions géométriques relatives aux deux questions précédentes.
4. On rappelle que les gaz sont supposés parfaits et la pression constante.
Montrer que $(n - 1) T$ est une constante du milieu, que l'on notera b .
5. On identifie le gradient de température à sa moyenne : $\frac{T_b - T_f}{d}$.

Déterminer la valeur de θ et R au voisinage des gaz brûlés lorsque $d = 7 \cdot 10^{-4}$ m, $L = 5 \cdot 10^{-2}$ m, $b = 10^{-1}$ K, $T_f = 300$ K et $T_b = 1500$ K.

V.B. MESURE DE VITESSE DE FLAMME

En l'absence de flamme, on focalise le faisceau laser grâce à une lentille de focale f en un point $(x, z) = (0, 0)$ d'un écran plan P normal à \mathbf{e}_y et on y place, de manière centrée, un photodétecteur rectangulaire H de largeur $2r_0$ suivant Ox (fig. 6).

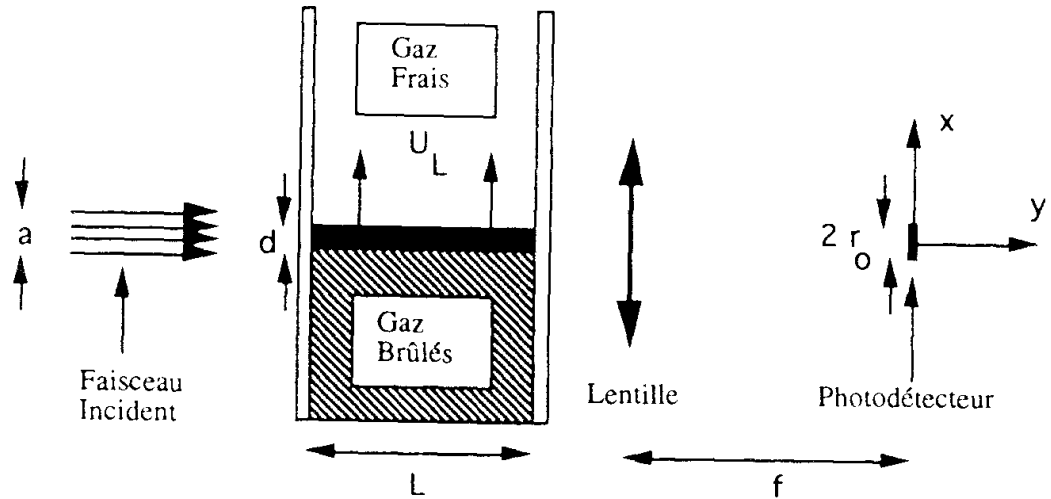


Figure 6

1. Soit un rayon lumineux de direction \mathbf{e}_y avant traversée de la flamme. Déterminer, en fonction de n , L , T et $\frac{dT^{-1}}{dx}$, son point d'impact sur le plan P .

En déduire que seuls les rayons traversant les zones où $\frac{dT^{-1}}{dx}$ est inférieur en module à une valeur-seuil A sont reçus par le détecteur.

2. On se place dans le cas où certains rayons ne sont pas reçus par le détecteur. Montrer que, sur tout axe de direction \mathbf{e}_y traversant le front de flamme, il existe, à tout instant, deux points d'abscisses $x_b(t)$ et $x_f(t)$ entre lesquels la valeur-seuil A est franchie.

On note x_0 leur abscisse médiane et δ leur distance. Déterminer $\frac{dx_0}{dt}$ et $\frac{d\delta}{dt}$.

Montrer que la puissance reçue par le détecteur, I_H , s'écrit :

$$I_H = \frac{I_0}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi_a(x) [1 - \Pi_\delta(x - x_0)] dx.$$

En déduire que, pour une certaine origine des temps :

$$I_H = \frac{I_0}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi_a(x) [1 - \Pi_\delta(x - U_F t)] dx.$$

3. Déterminer qualitativement l'allure de $\frac{I_H(t)}{I_0}$ au cours du temps dans les trois cas : $\delta \ll a$, $\delta = a$, $\delta \gg a$.
Préciser, pour chacun d'eux, le minimum de puissance relative reçue $\frac{I_H}{I_0}$, la durée de décroissance jusqu'à ce minimum et la durée totale de modification du flux I_H .

4. Lequel de ces trois cas est le mieux adapté aux mesures des caractéristiques de flamme ?

5. Représenter, sur un schéma, un dispositif permettant de mesurer δ et U_1 .

6. Quelle focale f faut-il utiliser pour que la valeur-seuil de détection A soit égale au gradient moyen $\frac{|T_b^{-1} - T_i^{-1}|}{d}$ de T^{-1} ?

On assimile dans ce cas δ à $\frac{d}{2}$. Déterminer le minimum de puissance relative reçue $\frac{I_H}{I_0}$, la durée de décroissance jusqu'à ce minimum et la durée totale de modification du flux I_H lorsque $d = 7 \cdot 10^{-4} \text{ m}$, $a = 4 \cdot 10^{-4} \text{ m}$, $r_0 = 10^{-3} \text{ m}$, $L = 5 \cdot 10^{-2} \text{ m}$, $b = 10^{-1} \text{ K}$, $T_i = 300 \text{ K}$, $T_b = 1500 \text{ K}$ et $U_1 = 4 \cdot 10^{-1} \text{ ms}^{-1}$.

U
détermi
gaz frais

O
gène, rel
perpend

O
breuses

l'indice

O
de U' v

O
la flamm

1. Mon

2. End

VI. SIXIÈME PARTIE

FLAMME TURBULENTE

Une flamme se propage dans un milieu gazeux agité de mouvements turbulents (fig. 7). On se propose de déterminer, en fonction des caractéristiques de la turbulence, sa vitesse moyenne U_T dans le référentiel où les gaz frais sont globalement au repos ainsi que sa dimension fractale.

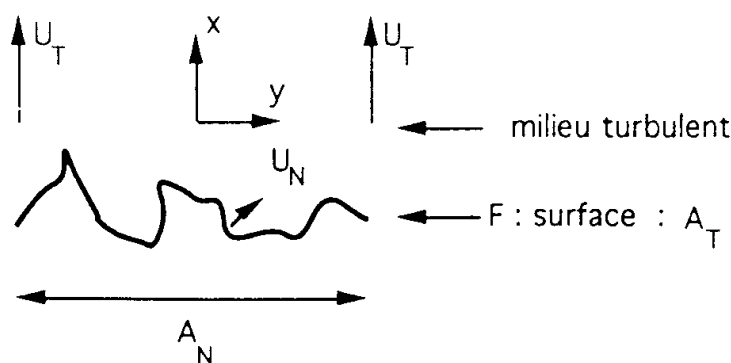


Figure 7

On modélise la flamme par une surface F avançant à vitesse normale U_N , supposée constante et homogène, relativement au milieu turbulent. On note Ox sa direction moyenne de propagation et Oy une direction perpendiculaire.

On modélise les mouvements du milieu turbulent par un écoulement permanent \mathbf{v}_i comportant de nombreuses composantes de Fourier \mathbf{v}_i de période spatiale $2L_i$:

$$\mathbf{v}_i = U_i' \sqrt{2} \left[\sin \left(2\pi \frac{x}{2L_i} \right) \cos \left(2\pi \frac{y}{2L_i} \right) \mathbf{e}_1 - \cos \left(2\pi \frac{x}{2L_i} \right) \sin \left(2\pi \frac{y}{2L_i} \right) \mathbf{e}_2 \right]$$

l'indice i variant de 0 à n .

On appelle L_i l'échelle de l'écoulement \mathbf{v}_i . On admet que, dans un écoulement turbulent, les valeurs de U_i' varient selon la loi de Kolmogorov en puissance de L_i :

$$\frac{U_i'}{U_0'} = \left(\frac{L_i}{L_0} \right)^{1/3}.$$

VIA. RUGOSITÉ ET VITESSE

On note A_1 l'aire de la surface F et A_N celle de sa surface projetée selon Ox . On appelle rugosité de la flamme le rapport $R = A_1 / A_N$.

1. Montrer que $U_T A_N = U_N A_1$.
2. En déduire que $R = U_T / U_N$.

VI.B. INTERACTION AVEC UN ÉCOULEMENT À UNE ÉCHELLE

Une flamme plane de direction normale Ox rencontre à un instant donné l'écoulement \mathbf{v} suivant :

$$\mathbf{v} = U' \sqrt{2} \left[\sin \left(2\pi \frac{x}{2L} \right) \cos \left(2\pi \frac{y}{2L} \right) \mathbf{e}_x + \cos \left(2\pi \frac{x}{2L} \right) \sin \left(2\pi \frac{y}{2L} \right) \mathbf{e}_y \right].$$

On note v_x et v_y les composantes de \mathbf{v} suivant les axes Ox et Oy .

On se place dans le cas où U' est très petit devant U_∞ : $U' \ll U_\infty$.

1. Montrer que, en l'absence de composante v_x , la composante v_y de \mathbf{v} n'induit aucune déformation de la flamme.

On négligera son influence par la suite.

2. Déterminer les points du plan xOy où la composante v_x de \mathbf{v} s'annule.

Ces points délimitent des domaines fermés qui seront appelés dans la suite « tourbillons ».

3. Déterminer, en fonction de L et U_∞ , le temps caractéristique de séjour T de la flamme sur un tourbillon.

Pendant ce temps, chaque partie de la flamme est advectée par le tourbillon d'une quantité algébrique δx dans la direction Ox .

Déterminer les extréma de δx et les points P correspondants du front de flamme.

4. On néglige les ondulations du front de flamme entre les points P déterminés précédemment au même titre que ceux produits par la composante v_y de \mathbf{v} .

En déduire les valeurs approchées suivantes :

$$\text{— angle moyen } \alpha \text{ dont tournent les plans de flamme : } \alpha = \frac{4\sqrt{2}}{\pi} \frac{U'}{U_\infty}$$

$$\text{— rugosité de la flamme : } R^2 = 1 + \frac{32}{\pi^2} \left(\frac{U'}{U_\infty} \right)^2$$

$$\text{— vitesse de flamme : } U_f^2 = U_\infty^2 + \frac{32}{\pi^2} U'^2. \quad (5)$$

VI.C. INTERACTION AVEC UN ÉCOULEMENT À PLUSIEURS ÉCHELLES

La flamme interagit avec l'écoulement \mathbf{v} superposition des écoulements \mathbf{v}_i d'échelle L_i . Elle présente de ce fait des plissements de toutes tailles L_i .

La portion de flamme contenue dans un tourbillon de taille L_i ne présente cependant que des plissements de taille inférieure ou égale à L_i . On note U_{i-1} sa vitesse moyenne. On admet que, pour ce tourbillon, les flammes ne présentant pas de plissement de taille L_i sont analogues à des flammes planes, de vitesse notée $U_{\infty,i}$.

On suppose que, à chaque échelle L_i , U'_i est très petit devant $U_{\infty,i}$: $U'_i \ll U_{\infty,i}$.

1. Montrer que $U_{\infty,i} = U_{i,i-1}$.

En déduire, en utilisant VI.B., une relation entre U_{i-1} , $U_{i,i-1}$ et U'_i .

2. Démontrer, en sommant la relation ainsi obtenue depuis l'indice 0, jusqu'à l'indice j , la relation :

$$U_{1,j}^2 = U_{\infty,j}^2 + \frac{32}{\pi^2} \sum_{i=0}^j U_{i,j}^2.$$

3. On définit l'intensité de turbulence U' d'un écoulement \mathbf{v} par l'écart type :

$$U' = \left[\langle \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \rangle - \langle \mathbf{v} \rangle \cdot \langle \mathbf{v} \rangle \right]^{1/2}$$

où l'opérateur $\langle \rangle$ symbolise la moyenne volumique sur un volume V , grand devant les échelles caractéristiques de variation de \mathbf{v} :

$$\langle f \rangle = \frac{1}{V} \int_V f d\tau.$$

Montrer que l'intensité de turbulence de chaque écoulement \mathbf{v}_i est U'_i .

Déterminer l'intensité de turbulence U' de l'écoulement \mathbf{v} , somme des écoulements \mathbf{v}_i .

4. Exprimer $U_{1,\infty}$ et $U_{\infty,\infty}$ en fonction des vitesses moyenne et normale U_1 et U_∞ de la flamme dans l'écoulement \mathbf{v} .

5. En déduire la relation :

$$U_1^2 = U_\infty^2 + \frac{32}{\pi^2} U'^2. \quad (6)$$

Son domaine de validité est-il borné à une valeur finie du rapport U'/U_∞ ?

6. Quel type de propriété d'invariance se manifeste dans l'identité des relations (5) et (6) ?

7. Montrer que, pour $U' \gg U_\infty$, la vitesse moyenne de flamme U_1 peut être considérée comme proportionnelle à l'intensité de turbulence U' .

VLD. DIMENSION FRACTALE

5. On définit la rugosité R_i d'un objet à l'échelle L_i comme celle résultant des plissements à des tailles intérieures ou égales à L_i .

On se restreint dorénavant à une suite géométrique d'échelles :

$$\frac{L_{i+1}}{L_i} = \alpha, \quad \alpha > 1.$$

Un objet est appelé fractal si sa rugosité R_i s'accroît d'un facteur constant à chaque introduction d'échelle supplémentaire :

$$\frac{R_{i+1}}{R_i} = \beta, \quad \beta > 1.$$

1. Montrer que, dans un objet fractal, il existe un exposant γ tel que : $\frac{R_{i+1}}{R_0} = \left(\frac{L_{i+1}}{L_0} \right)^\gamma$.

2. Montrer que si l'objet n'est fractal qu'au-delà d'une échelle L_k , sa rugosité vérifie : $\frac{R_{i+1}}{R_0} = \mu \left(\frac{L_{i+1}}{L_0} \right)^\gamma$ pour $i > k$, μ étant un préfacteur constant.

On appelle dimension fractale d_f d'une surface le nombre $d_f = 2 + \gamma$.

Quelle est la nature de l'objet lorsque $\gamma = 0$?

3. Montrer, en utilisant la question VI.A., que la rugosité R_f du front de flamme est : $R_f = \frac{U_T}{U_\infty}$.

En déduire, en utilisant les questions VI.C.2. et VI.C.4., que plus le nombre d'échelles augmente, plus la flamme se rapproche d'un objet fractal.

4. Montrer que, dans la limite d'un grand nombre d'échelles, la dimension fractale d'une flamme turbulente est $d_f = \frac{7}{3}$.